

---

# APUNTES DE CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL DE FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES

---

Francisco Javier Pérez González

Departamento de Análisis Matemático

Universidad de Granada

**Licencia.** Este texto se distribuye bajo una licencia *Creative Commons* en virtud de la cual se permite:

- Copiar, distribuir y comunicar públicamente la obra.
- Hacer obras derivadas.

Bajo las condiciones siguientes:

- **Reconocimiento.** Debe reconocer los créditos de la obra de la manera especificada por el autor o el licenciador (pero no de una manera que sugiera que tiene su apoyo o apoyan el uso que hace de su obra).
- **No comercial.** No puede utilizar esta obra para fines comerciales.
- **Compartir bajo la misma licencia.** Si altera o transforma esta obra, o genera una obra derivada, sólo puede distribuir la obra generada bajo una licencia idéntica a ésta.

<b>1. Cálculo diferencial en <math>\mathbb{R}^n</math></b>	<b>1</b>
1.1. Estructura euclídea y topología de $\mathbb{R}^n$	1
1.1.1. Ejercicios propuestos	2
1.1.2. Ejercicios propuestos	4
1.1.3. Sucesiones en $\mathbb{R}^n$	4
1.2. Campos escalares. Continuidad y límite funcional	5
1.2.1. Ejercicios propuestos	8
1.2.2. Ejercicios propuestos	13
1.2.3. Ejercicios propuestos	14
1.2.4. Curvas en $\mathbb{R}^n$	14
1.3. Derivadas parciales. Vector gradiente	15
1.3.1. Interpretación geométrica de las derivadas parciales	16
1.3.2. Campos escalares diferenciables	18
1.4. Rectas tangentes y planos tangentes	21
1.4.1. Curvas en el plano	21
1.4.2. Superficies en $\mathbb{R}^3$	22

1.4.3. Curvas en $\mathbb{R}^3$ . . . . .	24
1.4.4. Derivadas parciales de orden superior . . . . .	25
1.4.5. Ejercicios propuestos . . . . .	25
1.5. Extremos relativos . . . . .	27
1.5.1. Ejercicios propuestos . . . . .	32
1.5.2. Derivadas parciales de funciones compuestas . . . . .	33
1.5.3. Ejercicios propuestos . . . . .	35
1.6. Funciones vectoriales. Matriz jacobiana . . . . .	37
1.7. Extremos condicionados . . . . .	38
1.7.1. Teorema de los multiplicadores de Lagrange . . . . .	40
1.7.2. Ejercicios propuestos . . . . .	44
1.7.3. Cálculo de extremos en conjuntos compactos . . . . .	45
1.7.4. Ejercicios propuestos . . . . .	46
1.8. Derivación de funciones implícitamente definidas . . . . .	47
1.8.1. Ejercicios propuestos . . . . .	51
<b>2. Integrales múltiples</b>	<b>53</b>
2.1. Integrales dobles y triples . . . . .	54
2.1.1. Interpretaciones de las integrales dobles y triples . . . . .	56
2.2. Cálculo de integrales dobles y triples . . . . .	58
2.2.1. Integrales iteradas. Teorema de Fubini elemental . . . . .	58
2.2.2. Teorema del cambio de variables . . . . .	64
2.2.2.1. Coordenadas polares . . . . .	66
2.2.2.2. Coordenadas esféricas . . . . .	67
2.2.2.3. Interpretación de la fórmula del cambio de variables . . . . .	68
2.2.3. Ejercicios propuestos . . . . .	69

# Lección 1

---

## Cálculo diferencial en $\mathbb{R}^n$

---

### 1.1. Estructura euclídea y topología de $\mathbb{R}^n$

Como sabes,  $\mathbb{R}^n$  es un espacio vectorial en el que suele destacarse la llamada base canónica formada por los vectores  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\}$  donde  $\mathbf{e}_k$  es el vector cuyas componentes son todas nulas excepto la que ocupa el lugar  $k$  que es igual a 1. Dados dos vectores  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$   $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$  se define su producto escalar a por:

$$\langle \mathbf{x} | \mathbf{y} \rangle = \sum_{k=1}^n x_k y_k = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n$$

Este producto escalar se llama *producto escalar euclídeo*. Observa que el producto escalar de dos vectores no es un vector sino un número real. La notación  $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$  es frecuentemente usada en los libros de Física para representar el producto escalar de los vectores  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{y}$ .

Las siguientes propiedades del producto escalar se deducen fácilmente de la definición:

- $\langle \mathbf{x} | \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{y} | \mathbf{x} \rangle$  para todos  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$  (simetría).
- $\langle \alpha \mathbf{x} + \beta \mathbf{y} | \mathbf{z} \rangle = \alpha \langle \mathbf{x} | \mathbf{z} \rangle + \beta \langle \mathbf{y} | \mathbf{z} \rangle$  para todos  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  y para todos  $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$  (linealidad).

La norma euclídea de un vector  $\mathbf{x}$  se define por

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\langle \mathbf{x} | \mathbf{x} \rangle} = \sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2}$$

#### Desigualdad de Cauchy-Schwarz.

Para todos  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$  se verifica que  $|\langle \mathbf{x} | \mathbf{y} \rangle| \leq \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\|$ . Además, supuesto que  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{y}$  no son nulos, la igualdad  $|\langle \mathbf{x} | \mathbf{y} \rangle| = \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\|$  equivale a que hay un número  $\lambda \in \mathbb{R}$  tal que

$\mathbf{x} = \lambda \mathbf{y}$  (es decir, los vectores  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{y}$  están en una misma recta que pasa por el origen).

### Desigualdad triangular.

Para todos  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$  se verifica que  $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$ . Además, supuesto que  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{y}$  no son nulos, la igualdad  $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| = \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$  equivale a que hay un número  $\lambda > 0$  tal que  $\mathbf{x} = \lambda \mathbf{y}$  (es decir, los vectores  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{y}$  están en una misma semirrecta que pasa por el origen).

**1.1 Definición.** Se dice que los vectores  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{y}$  son **ortogonales**, y escribimos  $\mathbf{x} \perp \mathbf{y}$ , cuando su producto escalar es cero. Se dice que un vector  $\mathbf{x}$  es ortogonal a un conjunto de vectores  $E \subset \mathbb{R}^n$  cuando  $\mathbf{x}$  es ortogonal a todo vector en  $E$ . Un conjunto de vectores no nulos que son mutuamente ortogonales se dice que es un **conjunto ortogonal** de vectores; si, además, los vectores tienen todos norma 1 se dice que es un **conjunto ortonormal** de vectores. Una base vectorial que también es un conjunto ortogonal (ortonormal) se llama una **base ortogonal** (ortonormal).

Si  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{y}$  son vectores no nulos, el vector

$$\Pi_{\mathbf{y}}(\mathbf{x}) = \frac{\langle \mathbf{x} | \mathbf{y} \rangle}{\langle \mathbf{y} | \mathbf{y} \rangle} \mathbf{y}$$

se llama **proyección ortogonal de  $\mathbf{x}$  sobre  $\mathbf{y}$** .

Puedes comprobar que el vector  $\mathbf{x} - \Pi_{\mathbf{y}}(\mathbf{x})$  es ortogonal a  $\mathbf{y}$ . En particular, si  $\mathbf{y}$  es un **vector unitario** (de norma 1) entonces el vector  $\mathbf{x} - \langle \mathbf{x} | \mathbf{y} \rangle \mathbf{y}$  es ortogonal a  $\mathbf{y}$ .

#### 1.1.1. Ejercicios propuestos

---

##### 1. Prueba la desigualdad de Cauchy-Schwarz.

Sugerencia. Comprueba que la ecuación  $\langle \mathbf{x} - \lambda \mathbf{y} | \mathbf{x} - \lambda \mathbf{y} \rangle = 0$ , en la que  $\lambda$  es un número real arbitrario y  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{y}$  son vectores que se suponen fijos, es un trinomio de segundo grado en la variable  $\lambda$ . Ten en cuenta que dicho trinomio toma siempre valores mayores o iguales que cero (¿por qué?) lo que proporciona información sobre su discriminante.

##### 1. Prueba la desigualdad triangular.

Sugerencia. Una estrategia para probar desigualdades entre normas euclídeas es elevar al cuadrado. La desigualdad  $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 \leq (\|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|)^2$  es equivalente a

la desigualdad triangular pero es muy fácil de probar desarrollando el término  $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 = \langle \mathbf{x} + \mathbf{y} | \mathbf{x} + \mathbf{y} \rangle$  y usando la desigualdad de Cauchy-Schwarz.

**2. Teorema de Pitágoras.** Prueba que los vectores  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{y}$  son ortogonales si, y solo si,

$$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2.$$

**3.** Prueba que el vector  $\mathbf{x} - \prod_{\mathbf{y}}(\mathbf{x})$  es ortogonal a  $\mathbf{y}$ .

**1.2 Definición.** Dados dos vectores  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{y}$ , el número  $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$  se llama la **distancia** (euclídea) entre  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{y}$ .

- Dados  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  y  $r > 0$ , definimos  $B(\mathbf{x}, r) = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| < r\}$ .
- Un conjunto  $E \subset \mathbb{R}^n$  se dice que es un **conjunto abierto** si para todo punto  $\mathbf{x} \in E$  se verifica que hay un número  $r_{\mathbf{x}} > 0$  tal que  $B(\mathbf{x}, r_{\mathbf{x}}) \subset E$ . Por convenio, el conjunto vacío,  $\emptyset$ , se considera abierto.
- Es fácil comprobar que los conjuntos de la forma  $B(\mathbf{x}, r)$  son conjuntos abiertos. El conjunto  $B(\mathbf{x}, r)$  se llama **bola abierta** de centro  $\mathbf{x}$  y radio  $r$ .
- Un conjunto  $F \subset \mathbb{R}^n$  se dice que es un **conjunto cerrado** si su complemento  $\mathbb{R}^n \setminus F$  es un conjunto abierto.
- Dados  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  y  $r \geq 0$ , definimos  $\bar{B}(\mathbf{x}, r) = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \leq r\}$ . Es fácil comprobar que  $\bar{B}(\mathbf{x}, r)$  es un conjunto cerrado. Se llama **bola cerrada** de centro  $\mathbf{x}$  y radio  $r$ .
- Se dice que un conjunto  $E \subset \mathbb{R}^n$  es **acotado** cuando hay un número  $M > 0$  tal que  $\|\mathbf{x}\| \leq M$  para todo  $\mathbf{x} \in E$ .
- Se dice que un conjunto  $K \subset \mathbb{R}^n$  es **compacto** cuando es cerrado y acotado.
- Sea  $E \subset \mathbb{R}^n$ . Decimos que un punto  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  es **adherente** al conjunto  $E$  si toda bola abierta centrada en  $\mathbf{x}$  tiene puntos de  $E$ . El conjunto de todos los puntos adherentes a  $E$  se llama la **adherencia** de  $E$  y se representa por  $\bar{E}$ .
- Sea  $E \subset \mathbb{R}^n$ . Decimos que un punto  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  es un punto de **acumulación** del conjunto  $E$  si toda bola abierta centrada en  $\mathbf{x}$  tiene puntos de  $E$  *distintos* de  $\mathbf{x}$ . El conjunto de todos los puntos de acumulación de  $E$  se llama la **acumulación** de  $E$  y se representa por  $E'$ .
- Sea  $E \subset \mathbb{R}^n$ . El conjunto de todos los puntos adherentes a  $E$  y a  $\mathbb{R}^n \setminus E$  se llama la **frontera** de  $E$  y se representa por  $\text{Fr}(E)$ .
- Sea  $E \subset \mathbb{R}^n$ . Decimos que un punto  $\mathbf{x} \in E$  es un punto **interior** al conjunto  $E$  si hay alguna bola abierta centrada en  $\mathbf{x}$  contenida en  $E$ .

- Dados  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  y  $r > 0$ , el conjunto  $S(\mathbf{x}, r) = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| = r\}$  se llama **esfera** de centro  $\mathbf{x}$  y radio  $r$ .
- $\Pi_j$  es la aplicación  $\Pi_j: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  que a cada vector  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$  hace corresponder su coordenada  $j$ -ésima en la base canónica.

$$\Pi_j(\mathbf{x}) = \Pi_j((x_1, x_2, \dots, x_n)) = x_j$$

Las aplicaciones  $\Pi_j$ ,  $1 \leq j \leq n$ , así definidas se llaman las **proyecciones canónicas**.

### 1.1.2. Ejercicios propuestos

---

4. Prueba que  $B(\mathbf{x}, r)$  es un conjunto abierto.
5. Prueba que todo conjunto abierto es unión de bolas abiertas.
6. Prueba que la intersección de dos conjuntos abiertos es un conjunto abierto.
7. Prueba que la unión de conjuntos abiertos es un conjunto abierto.
8. Prueba que  $\overline{B}(\mathbf{x}, r)$  es un conjunto cerrado.
9. Prueba que la intersección de conjuntos cerrados es un conjunto cerrado.
10. Da ejemplos de conjuntos que no sean abiertos ni cerrados.
11. Prueba que  $\overline{E} = E \cup \text{Fr}(E)$ .

### 1.1.3. Sucesiones en $\mathbb{R}^n$

**1.3 Definición.** Una sucesión  $\{\mathbf{x}_m\}$  de puntos de  $\mathbb{R}^n$  se dice que es **convergente** si hay un vector  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  tal que  $\|\mathbf{x}_m - \mathbf{x}\| \rightarrow 0$ . En tal caso escribimos  $\lim_{m \rightarrow \infty} \{\mathbf{x}_m\} = \mathbf{x}$  o, simplemente,  $\{\mathbf{x}_m\} \rightarrow \mathbf{x}$  y decimos que  $\mathbf{x}$  es el **límite** de la sucesión  $\{\mathbf{x}_m\}$ .

Una sucesión  $\{\mathbf{x}_m\}$  de puntos de  $\mathbb{R}^n$  se dice que es **acotada** si hay un número  $M > 0$  tal que  $\|\mathbf{x}_m\| \leq M$  para todo  $m \in \mathbb{N}$ .

Teniendo en cuenta la desigualdad

$$\max \{|x_k - y_k| : 1 \leq k \leq n\} \leq \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \leq \sum_{k=1}^n |x_k - y_k| \quad (1.1)$$



Se deduce fácilmente que  $\{\mathbf{x}_m\} \rightarrow \mathbf{x}$  si, y sólo si,  $\{\Pi_j(\mathbf{x}_m)\} \rightarrow \Pi_j(\mathbf{x})$  para  $(1 \leq j \leq n)$ , esto es, **la convergencia en  $\mathbb{R}^n$  equivale a la convergencia por coordenadas**.

**1.4 Teorema (Teorema de Bolzano – Weierstrass).** *Toda sucesión acotada de puntos de  $\mathbb{R}^n$  tiene alguna sucesión parcial convergente.*

**1.5 Teorema (Caracterización de los conjuntos compactos).** *Un conjunto  $E \subset \mathbb{R}^n$  es compacto si, y sólo si, toda sucesión de puntos de  $E$  tiene alguna sucesión parcial que converge a un punto de  $E$ .*

## 1.2. Campos escalares. Continuidad y límite funcional

Reciben el nombre de *campos escalares* las funciones definidas en subconjuntos de  $\mathbb{R}^n$  que toman valores en  $\mathbb{R}$ . Un campo escalar es, por tanto, una función real que depende de  $n$  variables.

Un campo escalar de una variables es, simplemente, una función real de variable real; un campo escalar de dos variables es una función definida en un subconjunto del plano que toma valores reales; un campo escalar de tres variables es una función definida en un subconjunto del espacio que toma valores reales.

Los campos escalares de una o dos variables se pueden visualizar por medio de sus representaciones gráficas que son, respectivamente, curvas en el plano o superficies en el espacio. No es posible visualizar campos escalares de tres o más variables porque sus gráficas están en espacios de dimensión mayor o igual que 4.

Naturalmente, los campos escalares se pueden sumar y multiplicar al igual que lo hacemos con las funciones reales.

**1.6 Definición.** Sea  $f$  un campo escalar definido en un conjunto  $E \subset \mathbb{R}^n$  y sea  $\mathbf{a} \in E$ . Se dice que  $f$  es **continuo** en  $\mathbf{a}$  si para todo  $\varepsilon > 0$  existe un  $\delta > 0$  tal que se verifica  $\|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{a})\| < \varepsilon$  siempre que  $\mathbf{x} \in E$  y  $\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| < \delta$ .

Se dice que  $f$  es continuo en un conjunto  $A \subset E$  si  $f$  es continuo en todo punto  $\mathbf{a} \in A$ .

Un ejemplo de campo escalar continuo lo proporcionan las proyecciones canónicas  $\Pi_j$  pues se tiene que

$$|\Pi_j(\mathbf{x}) - \Pi_j(\mathbf{y})| = |x_j - y_j| \leq \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$$

de donde se deduce enseguida la continuidad de  $\Pi_j$ .

**1.7 Proposición.** *a) Si  $f$  y  $g$  son campos escalares definidos en un conjunto  $E \subset \mathbb{R}^n$ , se verifica que los campos escalares  $f + g$  y  $f g$  son continuos en todo punto de  $E$  donde  $f$  y  $g$  sean continuos. Y si  $f$  no se anula en  $E$ , el campo escalar  $1/f$  es continuo en todo punto de  $E$  donde  $f$  sea continuo.*

*b) Sea  $f$  un campo escalar definido en un conjunto  $E \subset \mathbb{R}^n$  y sea  $h$  una función real de variable real continua definida en un intervalo  $I$  que contiene la imagen de  $f$ ,  $I \supset f(E)$ . Entonces el campo escalar  $h \circ f$  es continuo en todo punto de  $E$  donde  $f$  sea continuo.*

Los campos escalares más sencillos son las funciones polinómicas de varias variables. Dichas funciones se obtienen como sumas de productos de las proyecciones canónicas y son, por tanto, continuas.

Para  $n = 3$  las proyecciones canónicas son

$$\Pi_1((x, y, z)) = x, \quad \Pi_2((x, y, z)) = y, \quad \Pi_3((x, y, z)) = z$$

Un producto de estas funciones es una función de la forma  $f(x, y, z) = x^m y^p z^q$  donde  $m, p, q$  son números naturales o nulos. Las funciones polinómicas en tres variables son combinaciones lineales de este tipo de funciones.

Las funciones racionales de  $n$  variables son las funciones de la forma

$$R(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{P(x_1, x_2, \dots, x_n)}{Q(x_1, x_2, \dots, x_n)}$$

Donde  $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$  y  $Q(x_1, x_2, \dots, x_n)$  son funciones polinómicas de  $n$  variables. El *dominio natural* de definición de una función racional es el conjunto de puntos donde no se anula el denominador  $\Omega = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : Q(\mathbf{x}) \neq 0\}$ . Las funciones racionales son continuas en su conjunto natural de definición.

Componiendo funciones continuas reales de una variable con funciones polinómicas y racionales en varias variables obtenemos muchísimos ejemplos de campos escalares continuos. Aquí tienes unos pocos.

$$f(x, y) = \sin(xy), \quad f(x, y) = \log(1 + x^2 + y^2), \quad f(x, y, z) = \frac{1 + xy^2 + xz^2}{2 + \arctg(xyz)}$$

El siguiente resultado establece la relación entre la continuidad y el límite secuencial.

**1.8 Proposición.** *Sea  $f$  un campo escalar definido en un conjunto  $E \subset \mathbb{R}^n$  y sea  $\mathbf{a} \in E$ . Equivalen las siguientes afirmaciones:*

*a)  $f$  es continua en  $\mathbf{a}$ .*

b) Para toda sucesión  $\{\mathbf{x}_n\}$  de puntos de  $E$  tal que  $\{\mathbf{x}_n\} \rightarrow \mathbf{a}$  se verifica que  $\{f(\mathbf{x}_n)\} \rightarrow f(\mathbf{a})$ .

El siguiente resultado se demuestra de la misma forma que su análogo para funciones reales.

**1.9 Teorema (Teorema de Weierstrass).** *Todo campo escalar continuo en un conjunto compacto alcanza en dicho conjunto un valor máximo absoluto y un valor mínimo absoluto.*

Dicho de otra forma, si  $K \subset \mathbb{R}^n$  es un conjunto compacto y  $f$  es un campo escalar continuo en  $K$ , entonces hay puntos  $\mathbf{a} \in K$ ,  $\mathbf{b} \in K$  tales que  $f(\mathbf{a}) \leq f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{b})$  para todo  $\mathbf{x} \in K$ .

**1.10 Definición.** Sea  $f$  un campo escalar definido en un conjunto  $E \subset \mathbb{R}^n$  y sea  $\mathbf{a} \in E'$ . Se dice que  $f$  **tiene límite en  $\mathbf{a}$**  si hay un número  $L \in \mathbb{R}$  con la propiedad de que para todo  $\varepsilon > 0$  existe un  $\delta > 0$  tal que se verifica  $\|f(\mathbf{x}) - L\| < \varepsilon$  siempre que  $\mathbf{x} \in E$  y  $0 < \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| < \delta$ . Simbólicamente escribimos  $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = L$ . El número  $L$  se llama *límite* de  $f$  en  $\mathbf{a}$ .

El siguiente resultado establece la relación entre el límite funcional y el límite secuencial.

**1.11 Proposición.** *Sea  $f$  un campo escalar definido en un conjunto  $E \subset \mathbb{R}^n$  y sea  $\mathbf{a} \in E'$ . Equivalen las siguientes afirmaciones:*

a)  $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = L$ .

b) Para toda sucesión  $\{\mathbf{x}_n\}$  de puntos de  $E$  distintos de  $\mathbf{a}$ , tal que  $\{\mathbf{x}_n\} \rightarrow \mathbf{a}$  se verifica que  $\{f(\mathbf{x}_n)\} \rightarrow L$ .

La relación entre límite funcional y continuidad es la que ya conoces.

**1.12 Proposición.** *Sea  $f : A \rightarrow F$  y  $\mathbf{a} \in A \cap A'$ . Equivalen las siguientes afirmaciones:*

a)  $f$  es continua en  $\mathbf{a}$ .

b)  $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a})$ .

En lo que sigue vamos a considerar el caso más sencillo de un campo escalar de dos variables:  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  donde  $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}^2$ . Supongamos que  $\alpha \in A'$  y queremos estudiar el límite  $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \alpha} f(\mathbf{x})$ . En  $\mathbb{R}^2$  tenemos que  $\mathbf{x} = (x, y)$ ,  $\alpha = (a, b)$ , por lo que el límite anterior se escribe usualmente en la forma  $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y)$  (y no debes olvidar el paréntesis que indica vector:  $(x, y)$  y  $(a, b)$ , porque no tiene sentido escribir

$\lim_{x,y \rightarrow a,b} f(x,y)$ ). Siempre que te encuentres en esta situación el resultado de intentar evaluar la función  $f$  en  $(a,b)$  va a ser una indeterminación, es decir, una expresión del tipo  $0/0, \infty/\infty$  o  $1^\infty$  y otras que ya conoces de primer curso. Veamos un ejemplo.

**1.13 Ejemplo.** Sea  $f(x,y) = \frac{\text{sen}(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$ . Esta función es un campo escalar definido (y continuo ¿por qué?) en  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ . Si tratas de evaluar  $f(x,y)$  en  $(0,0)$  obtienes la indeterminación  $0/0$ . En este caso, como en otros parecidos, hay una forma sencilla de proceder. Basta darse cuenta de que nuestra función es de la forma  $\frac{\text{sen}(t)}{t}$  donde  $t = x^2 + y^2$ . Dicho de otra forma, el campo escalar  $f$  es la composición de la función  $g(t) = \frac{\text{sen}(t)}{t}$  con la función polinómica  $h(x,y) = x^2 + y^2$ . Llegado aquí ya debes intuir lo que vale el límite  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y)$ : cuando  $(x,y)$  está muy próximo a  $(0,0)$  el número  $t = x^2 + y^2$  está muy próximo también a 0 por lo que  $\frac{\text{sen}(t)}{t}$  está muy próximo a 1.

Justifiquemos que  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = 1$ . Para ello definamos  $g(0) = 1$ , con lo que la función  $g$  resulta continua en 0 (porque ya conoces el famoso límite  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\text{sen } t}{t} = 1$ ). Ahora, está claro que definiendo  $f(0,0) = 1$  la función  $f$  así extendida es continua en  $(0,0)$  porque es composición de funciones continuas: la función  $h(x,y) = x^2 + y^2$  que es continua y  $h(0,0) = 0$  y la función  $g$  que es continua y  $g(0) = 1$ . Luego  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = 1$ .

Otra forma de proceder, más cómoda en este caso, es trabajar con sucesiones. Para ello sea  $\{(x_n, y_n)\} \rightarrow (0,0)$  con  $(x_n, y_n) \neq (0,0)$ . Pongamos  $z_n = x_n^2 + y_n^2$ . Claramente,  $\{z_n\} \rightarrow 0$  y  $z_n \neq 0$  por lo que:

$$h(x_n, y_n) = \frac{\text{sen}(x_n^2 + y_n^2)}{x_n^2 + y_n^2} = \frac{\text{sen}(z_n)}{z_n} \rightarrow 1.$$

Como esto es cierto para toda sucesión en las condiciones anteriores, deducimos que  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = 1$ . ♦

### 1.2.1. Ejercicios propuestos

**12.** Sean  $f$  y  $g$  funciones de una variable real tales que  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \alpha$  y  $\lim_{x \rightarrow b} g(x) = \beta$ .

Prueba que:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x)g(y) = \alpha\beta, \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} (f(x) + g(y)) = \alpha + \beta.$$

**13.** Estudia la continuidad de los siguientes campos escalares y el límite en el punto  $\alpha$  indicado en cada caso:

a)  $f(x, y) = (1 + xy)^{\frac{1}{xy}}$  definido en  $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ ,  $\alpha = (0, 0)$ .

b)  $f(x, y) = \frac{\log(1 + x^2 + y^2)}{x^2 + y^2}$  definido en  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ ,  $\alpha = (0, 0)$ .

c)  $f(x, y) = \frac{e^{x^2} e^{y^2} - 1}{x^2 + y^2}$  definido en  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ ,  $\alpha = (0, 0)$ .

d)  $f(x, y) = \frac{\cos(x^2 + y^2) - 1}{(x^2 + y^2)^2}$  definido en  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ ,  $\alpha = (0, 0)$ .

e)  $f(x, y) = \frac{\operatorname{sen} x \operatorname{arctg} y}{xy}$  definido en  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy \neq 0\}$ ,  $\alpha = (0, 0)$ .

f)  $f(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1} - 1}$  definido en  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ ,  $\alpha = (0, 0)$ .

g)  $f(x, y) = \frac{1 - \cos(x + y)}{x^2 + y^2 + 2xy}$  definido en  $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ ,  $\alpha = (0, 0)$ .

**14.** Sea  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  una función de clase  $C^1$  en un intervalo  $I$ . Se define la función  $h : I \times I \rightarrow \mathbb{R}$  por:

$$h(x, y) = \begin{cases} \frac{f(x) - f(y)}{x - y}, & x \neq y; \\ f'(x), & x = y. \end{cases}$$

Estudia la continuidad de  $h$ .

**15.** Sea  $f : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  la función dada por:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{e^x - e^y}{\log x - \log y}, & x \neq y; \\ x e^x, & x = y. \end{cases}$$

Estudia la continuidad de  $f$  y la existencia de límite de  $f$  en  $(0, 0)$ .

Para no tener que indicar en cada caso el conjunto donde está definido un campo escalar, te recuerdo que si un campo escalar viene dado por medio de funciones elementales su *dominio natural* de definición es el conjunto más grande en el que las operaciones que definen a dicho campo tienen sentido para valores reales de las variables.

### Límites direccionales y límite de un campo escalar a lo largo de una curva

En la recta real solamente podemos aproximarnos a un punto  $\alpha \in \mathbb{R}$  por dos direcciones: por valores mayores y por valores menores que  $\alpha$ . Como sabes esto da lugar a los límites laterales en  $\alpha$ . Muy diferente situación tenemos si  $\alpha \in \mathbb{R}^2$  pues podemos acercarnos a  $\alpha$  por infinitas direcciones, a saber, todas las de la forma  $\alpha + t\mathbf{u}$  donde  $\mathbf{u}$  es un vector unitario en  $\mathbb{R}^2$  y  $t \in \mathbb{R}$ . Naturalmente, si existe el límite  $\lim_{\substack{\mathbf{x} \rightarrow \alpha \\ \mathbf{x} \in A}} f(\mathbf{x}) = \ell$  entonces para todo conjunto  $B \subset A$  con  $\alpha \in B'$  también se verifica que  $\lim_{\substack{\mathbf{x} \rightarrow \alpha \\ \mathbf{x} \in B}} f(\mathbf{x}) = \ell$ . En particular, si  $B = \{\alpha + t\mathbf{u} : t \in \mathbb{R}\} \cap A$ , entonces se tiene que:

$$\lim_{\substack{\mathbf{x} \rightarrow \alpha \\ \mathbf{x} \in B}} f(\mathbf{x}) = \lim_{t \rightarrow 0} f(\alpha + t\mathbf{u})$$

Este límite se llama *límite de  $f$  en  $\alpha$  según la dirección dada por el vector  $\mathbf{u}$* . Según acabamos de decir, si existe  $\lim_{\substack{\mathbf{x} \rightarrow \alpha \\ \mathbf{x} \in A}} f(\mathbf{x}) = \ell$  entonces también debe ser  $\lim_{t \rightarrow 0} f(\alpha + t\mathbf{u}) = \ell$  para todo vector unitario  $\mathbf{u}$ .

Podemos generalizar considerando en vez de una recta que pasa por  $\alpha$  otro tipo de curvas que pasan por  $\alpha$ , por ejemplo, si  $\alpha = (0,0)$ , podemos considerar parábolas  $\gamma(t) = (t, \lambda t^2)$  o  $\gamma(t) = (\lambda t^2, t)$ . En general, si  $\gamma(t) = (x(t), y(t))$  es una curva que pasa por  $\alpha$ ,  $\gamma(0) = \alpha$ , el límite  $\lim_{t \rightarrow 0} f(\gamma(t))$  se llama *límite de  $f$  en  $\alpha$  a lo largo de la curva  $\gamma$* . Si existe el límite de  $f$  en  $\alpha$  entonces existe el límite de  $f$  a lo largo de toda curva que pasa por  $\alpha$  y todos ellos coinciden con el valor del límite.

Estos resultados pueden ser útiles para probar que un cierto límite no existe: para ello basta encontrar que no existe el límite a lo largo de una determinada curva o dirección, o bien probar que los límites a lo largo de dos curvas o direcciones distintas son diferentes.

Puesto que un vector unitario en  $\mathbb{R}^2$  con la norma euclídea es de la forma  $\mathbf{u} = (\cos \vartheta, \sin \vartheta)$ , y  $\alpha = (a, b)$ , suelen escribirse los límites direccionales en la forma:

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(\alpha + t\mathbf{u}) = \lim_{t \rightarrow 0} f(a + t \cos \vartheta, b + t \sin \vartheta)$$

Es frecuente escribir una recta que pasa por  $(a, b)$  en la forma  $\gamma(t) = (a + t, b + \lambda t)$  donde  $\lambda \in \mathbb{R}$  es un parámetro fijo – la pendiente de la recta – en cuyo caso los límites direccionales en  $(a, b)$  vienen dados por:

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(a + t, b + \lambda t)$$

Cuando  $(a, b) = (0, 0)$  las rectas por el origen suelen representarse en la forma  $\gamma(t) = (t, \lambda t)$  o  $\gamma(t) = (\lambda t, t)$  donde  $\lambda$  es un parámetro fijo.

Con frecuencia es más cómodo estudiar los límites en  $(0,0)$ . Esto puede hacerse siempre mediante una traslación pues:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x+a, y+b)$$

Hay que observar que la existencia de todos los límites direccionales en un punto siendo, además, todos ellos iguales, no garantiza la existencia del límite en dicho punto.

**1.14 Ejemplo.** Sea  $f(x,y) = \frac{y}{x} \sin(x^2 + y^2)$  definido en  $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x \neq 0\}$ . Estudiemos el límite de  $f$  en  $\alpha = (0,0)$ .

Consideremos rectas por el origen  $\gamma(t) = (t, \lambda t)$ . Tenemos  $f(\gamma(t)) = \lambda \sin((1 + \lambda^2)t^2)$ , por lo que  $\lim_{t \rightarrow 0} f(t, \lambda t) = 0$ . Por tanto, los límites según todas las direcciones que pasan por el origen (excepto la dirección del eje de ordenadas  $\gamma(t) = (0, t)$  en la que no está definida  $f$ ) existen y son todos iguales a 0.

Observa que si  $\gamma(t) = (x(t), y(t))$  es una curva con  $\gamma(0,0) = 0$ , se tiene que:

$$f(\gamma(t)) = \frac{y(t)}{x(t)} \sin(x(t)^2 + y(t)^2)$$

Como las curvas son funciones continuas  $\lim_{t \rightarrow 0} \sin(x(t)^2 + y(t)^2) = \sin(0) = 0$ . Por lo que para toda curva en estas condiciones que verifique que el cociente  $\frac{y(t)}{x(t)}$  esté acotado se tendrá que  $\lim_{t \rightarrow 0} f(\gamma(t)) = 0$ .

A la vista de lo anterior, podemos buscar una curva  $\gamma(t) = (x(t), y(t))$  con  $\gamma(0,0) = 0$  tal que  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{y(t)}{x(t)} = \infty$  y que  $\sin(x(t)^2 + y(t)^2)$  tienda a 0 más lentamente. Como sabemos que  $\sin(t) \sim t$  para  $t \rightarrow 0$ , la idea es tomar una curva  $\gamma(t) = (x(t), y(t))$  que verifique:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{y(t)}{x(t)} = \frac{1}{t^2} \\ x(t)^2 + y(t)^2 = |t| \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} x(t) = t^2 \sqrt{\frac{|t|}{1+t^4}} \\ y(t) = \sqrt{\frac{|t|}{1+t^4}} \end{cases}$$

Para dicha curva (que pasa por  $(0,0)$ ) tenemos que:

$$f(\gamma(t)) = f(x(t), y(t)) = \frac{1}{t^2} \sin(|t|) = \frac{1}{|t|} \frac{\sin(|t|)}{|t|} \Rightarrow \lim_{t \rightarrow 0} f(\gamma(t)) = +\infty$$

El campo escalar  $f$  diverge positivamente a lo largo de dicha curva, por lo que dicho campo no tiene límite en  $(0,0)$ . ♦

### Límites iterados

Para estudiar la existencia del límite de un campo escalar de dos variables suelen usarse los *límites iterados*. Consideremos un campo escalar  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  donde  $A$  es de la forma  $A = I \times J \setminus \{(0,0)\}$  siendo  $I, J$  intervalos abiertos en  $\mathbb{R}$  que contienen al 0. Esta situación no es restrictiva dado el carácter local del límite. Supongamos que para todo  $x \in I \setminus \{0\}$  existe el límite  $\lim_{y \rightarrow 0} f(x, y)$ . Tal límite dependerá en general del valor fijado de  $x \in I \setminus \{0\}$ . Definimos:

$$G : I \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R} \quad G(x) = \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) \quad (1.2)$$

Si la función  $G$  tiene límite en 0 dicho límite se llama un *límite iterado* de  $f$  en  $(0,0)$  y suele representarse en la forma:

$$\lim_{x \rightarrow 0} G(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) \right) \quad (1.3)$$

Análogamente, si para todo  $y \in J \setminus \{0\}$  existe el límite  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x, y)$ , podemos definir la función:

$$H : J \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R} \quad H(y) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) \quad (1.4)$$

Si la función  $H$  tiene límite en 0 dicho límite se llama un *límite iterado* de  $f$  en  $(0,0)$  y suele representarse en la forma:

$$\lim_{y \rightarrow 0} H(y) = \lim_{y \rightarrow 0} \left( \lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) \right) \quad (1.5)$$

Los límites iterados pueden no existir incluso aunque exista el límite de  $f$  en  $(0,0)$ .

**1.15 Proposición.** *En la situación que estamos considerando, supongamos que se verifica alguna de las siguientes afirmaciones:*

- *Los dos límites iterados (1.3) y (1.5) existen y son distintos.*
- *La función  $G$  definida en (1.2) existe pero no existe el límite de  $G$  en 0.*
- *La función  $H$  definida en (1.4) existe pero no existe el límite de  $H$  en 0.*

*Entonces no existe el límite de  $f$  en  $(0,0)$ .*

*Si existe solamente uno de los límites iterados o bien ambos y coinciden, entonces el límite de  $f$  en  $(0,0)$  puede no existir, pero si existe es igual al valor de dicho límite iterado.*

Observa que los límites iterados son límites de funciones de una variable por lo que suelen ser fáciles de calcular.



### 1.2.2. Ejercicios propuestos

---

**16.** Estudia la existencia del límite en  $(0,0)$  para cada uno de los siguientes campos escalares definidos en  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ .

$$\begin{aligned}
 \text{a) } f(x,y) &= \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{b) } f(x,y) &= \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{c) } f(x,y) &= \frac{x^2y}{x^4+y^2} \\
 \text{d) } f(x,y) &= \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{e) } f(x,y) &= \frac{(x+y)^2}{x^2+y^2} & \text{f) } f(x,y) &= \frac{x \operatorname{sen} y + y \operatorname{sen} x}{x^2+y^2} \\
 \text{g) } f(x,y) &= \frac{y^3}{(x^2+y^2)^{3/2}} & \text{h) } f(x,y) &= \begin{cases} y \operatorname{sen}(1/x) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases} \\
 \text{i) } f(x,y) &= \frac{x^2y^2}{(x^2+y^2)^{3/2}} & \text{j) } f(x,y) &= \frac{x^4+3x^2y^2+2xy^3}{(x^2+y^2)^2} \\
 \text{k) } f(x,y) &= \frac{2x^5+2y^3(2x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2} \\
 \text{l) } f(x,y) &= \frac{y^2(x^3+y^2)+x^4}{x^4+y^4} \\
 \text{m) } f(x,y) &= \frac{x^2y+x \operatorname{sen} y}{\sqrt{x^2+y^2}-xy} \\
 \text{n) } f(x,y) &= \frac{1+x-\cos(x^2+y^2)-\operatorname{arc} \operatorname{tg} x}{x^2+y^2}
 \end{aligned}$$

En los ejemplos de campos escalares de dos variables que hemos considerado aparece con frecuencia la expresión  $x^2+y^2$ . En los campos escalares de tres variables aparece con frecuencia la expresión  $x^2+y^2+z^2$ . Esto no es un capricho matemático sino que procede de la Física: los potenciales newtonianos y los potenciales eléctricos varían en razón inversa a la distancia euclídea y las fuerzas de atracción gravitatoria y eléctrica varían en razón inversa al cuadrado de la distancia euclídea. La expresión  $x^2+y^2$  se simplifica usando coordenadas polares, es decir, escribiendo  $(x,y) = (\rho \cos \vartheta, \rho \operatorname{sen} \vartheta)$  con lo cual  $x^2+y^2 = \rho^2$ .

**1.16 Proposición.** Sea  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  donde  $A = B_2((0,0), r) \setminus \{(0,0)\}$  y  $B_2((0,0), r)$  es la bola euclídea abierta en  $\mathbb{R}^2$  centrada en el origen de radio  $r$ . Definamos la función:

$$g : ]0, r[ \times [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{dada por} \quad g(\rho, \vartheta) = f(\rho \cos \vartheta, \rho \operatorname{sen} \vartheta)$$

Entonces equivalen las siguientes afirmaciones:

a)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = 0.$

b) Existe una función  $g : ]0, r[ \rightarrow \mathbb{R}$  que verifica que  $|f(\rho \cos \vartheta, \rho \sin \vartheta)| \leq g(\rho)$  para todo  $\vartheta \in [0, 2\pi]$  y  $\lim_{\rho \rightarrow 0} g(\rho) = 0.$

En el estudio de límites conviene tener presente la desigualdad  $|xy| \leq \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$  que se deduce de  $0 \leq (|x| - |y|)^2.$

### 1.2.3. Ejercicios propuestos

---

17. Estudia la existencia del límite en  $(0,0)$ , y calcula su valor cuando exista, para cada uno de los siguientes campos escalares definidos en  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}.$

a)  $f(x,y) = \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}$     b)  $f(x,y) = \frac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2}$     c)  $f(x,y) = \frac{\log(1 + \sqrt{x^2 + y^2})}{|x| + |y|}$

d)  $f(x,y) = \frac{\operatorname{sen} y \log(1 + x^2)}{x^2 + y^2}$     e)  $f(x,y) = \frac{x \operatorname{sen} y - y \operatorname{sen} x}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}$

18. Estudia la existencia del límite en  $(0,0)$ , y calcula su valor cuando exista, para cada uno de los siguientes campos escalares definidos en  $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+.$

a)  $f(x,y) = \frac{\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y}{x + y}$     b)  $f(x,y) = \frac{x e^y + y e^x}{x + y}$     c)  $f(x,y) = \left( \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} \right) \operatorname{sen}(xy)$

19. Estudia para qué números positivos  $\alpha$  el campo escalar  $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \rightarrow \mathbb{R}$  dado por:

$$f(x,y) = \frac{\operatorname{sen}(xy)}{(x^2 + y^2)^\alpha}$$

tiene límite en  $(0,0).$

### 1.2.4. Curvas en $\mathbb{R}^n$

Una curva en  $\mathbb{R}^n$  es una aplicación continua  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ . El punto  $\gamma(a)$  se llama *origen* y el punto  $\gamma(b)$  *extremo* de la curva. Naturalmente, como  $\gamma(t) \in \mathbb{R}^n$  podremos expresarlo por medio de sus componentes en la base canónica que serán funciones de  $t$ .

$$\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t), \dots, \gamma_n(t))$$

Las funciones  $\gamma_k(t)$  se llaman funciones componentes de  $\gamma$ . Se dice que  $\gamma$  es derivable en un punto  $t$  cuando todas sus funciones componentes son derivables en dicho punto, en cuyo caso la derivada de  $\gamma$  en  $t$  es, por definición, el vector

$$\gamma'(t) = (\gamma_1'(t), \gamma_2'(t), \dots, \gamma_n'(t))$$

Dado un punto  $\mathbf{a} = \gamma(t_0)$  tal que  $\gamma'(t_0) \neq \mathbf{0}$ , se define la **recta tangente** a  $\gamma$  en el punto  $\mathbf{a}$  (aunque es más apropiado decir *en el punto  $t_0$* ) como la recta de ecuación paramétrica  $\mathbf{a} + t\gamma'(t_0)$ , es decir, la recta que pasa por  $\mathbf{a}$  con vector de dirección  $\gamma'(t_0)$ .

Cuando se interpreta  $\gamma(t)$  como la función de trayectoria de un móvil, entonces su **velocidad** en un instante  $t$  es el vector  $\gamma'(t)$  y su **rapidez** es  $\|\gamma'(t)\|$ . La distancia que recorre dicho móvil entre dos instantes  $t = a$  y  $t = b$  viene dada por

$$\int_a^b \|\gamma'(t)\| dt.$$

**1.17 Definición.** Un conjunto abierto  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  con la propiedad de que cualesquiera dos de sus puntos pueden unirse por una curva que queda dentro de  $\Omega$  se llama un **dominio**.

Intuitivamente, un dominio es un conjunto abierto *de un solo trozo*. Los dominios desempeñan en  $\mathbb{R}^n$  un papel similar al de los intervalos en  $\mathbb{R}$ .

### 1.3. Derivadas parciales. Vector gradiente

Acabamos de ver que los conceptos de continuidad y límite para funciones reales de una variable se generalizan fácilmente para campos escalares de varias variables. No ocurre lo mismo con el concepto de derivabilidad el cual no puede generalizarse de forma inmediata. La razón es que el concepto de derivabilidad hace intervenir la división de números reales, pues una derivada es un límite de cocientes incrementales, y en  $\mathbb{R}^n$  no podemos dividir por vectores, es decir, la estructura algebraica de  $\mathbb{R}^n$  no permite generalizar algo parecido a un “cociente incremental”. Si  $f$  es un campo escalar de dos o más variables, la expresión

$$\frac{f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{a})}{\mathbf{x} - \mathbf{a}}$$

no tiene ningún sentido.

Otra diferencia importante es que en la recta real,  $\mathbb{R}$ , solamente podemos acercarnos a un punto de ella a través de la propia recta, mientras que en  $\mathbb{R}^n$  para  $n \geq 2$

hay muchísimas más posibilidades de acercarse a un punto dado; por ejemplo, podemos acercarnos a través de cualquier curva que pase por dicho punto. Surge así una primera idea que consiste en acercarse a un punto dado a través de una recta dada. Parece que esta situación es más parecida a lo que conocemos para funciones reales de una variable.

**1.18 Definición.** Una **dirección** en  $\mathbb{R}^n$  es un vector de norma 1.

- Dados un punto  $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$  y una dirección  $\mathbf{u}$ , la recta que pasa por  $\mathbf{a}$  con dirección  $\mathbf{u}$  es la imagen de la aplicación  $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  dada por  $\gamma(t) = \mathbf{a} + t\mathbf{u}$ , es decir, es el conjunto de puntos  $\{\mathbf{a} + t\mathbf{u} : t \in \mathbb{R}\}$ .
- Sea  $f$  un campo escalar definido en un conjunto abierto  $E \subset \mathbb{R}^n$ , sea  $\mathbf{a} \in E$  y  $\mathbf{u}$  una dirección. Se define la **derivada de  $f$  en  $\mathbf{a}$  en la dirección  $\mathbf{u}$**  como el límite

$$D_{\mathbf{u}}f(\mathbf{a}) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{a} + t\mathbf{u}) - f(\mathbf{a})}{t} \quad (1.6)$$

supuesto, claro está, que dicho límite exista.

- Las derivada direccional de un campo escalar  $f$  en un punto  $\mathbf{a}$  en la dirección del vector  $\mathbf{e}_k$  de la base canónica, se llama derivada parcial de  $f$  en  $\mathbf{a}$  respecto a la variable  $k$ -ésima. Está definida por

$$\begin{aligned} D_{\mathbf{e}_k}f(\mathbf{a}) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{a} + t\mathbf{e}_k) - f(\mathbf{a})}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a_1, \dots, a_k + t, \dots, a_n) - f(a_1, \dots, a_k, \dots, a_n)}{t} \\ &= \lim_{x_k \rightarrow a_k} \frac{f(a_1, \dots, x_k, \dots, a_n) - f(a_1, \dots, a_k, \dots, a_n)}{x_k - a_k} \end{aligned} \quad (1.7)$$

y se representa con los símbolos  $D_k f(\mathbf{a})$  y  $\frac{\partial f}{\partial x_k}(\mathbf{a})$ .

Observa que las derivadas que acabamos de definir son derivadas de funciones reales de una variable real pues, para calcular la derivada de un campo escalar  $f$  en un punto  $\mathbf{a}$  en la dirección  $\mathbf{u}$  lo que se hace es derivar en  $t = 0$  la función  $t \mapsto f(\mathbf{a} + t\mathbf{u})$  que es una función real de una variable real.

Observa que la segunda igualdad de (1.7) nos dice que, *para calcular la derivada parcial  $D_k f(\mathbf{a})$ , lo que se hace es derivar  $f$  respecto a la variable  $k$ -ésima considerando fijas las demás variables*. Por eso se llaman derivadas *parciales*.

### 1.3.1. Interpretación geométrica de las derivadas parciales

Es importante que entiendas el significado de las derivadas parciales de una función en un punto. Para poder visualizarlo vamos a considerar un campo esca-

lar  $f$  de dos variables definido en  $E \subset \mathbb{R}^2$ . Fijemos un punto  $(a, b)$ . Las derivadas parciales de  $f$  en  $(a, b)$  son, por definición

$$\begin{aligned} D_1 f(a, b) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a+t, b) - f(a, b)}{t} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x, b) - f(a, b)}{x - a} \\ D_2 f(a, b) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a, b+t) - f(a, b)}{t} = \lim_{y \rightarrow b} \frac{f(a, y) - f(a, b)}{y - b} \end{aligned}$$

Es decir, lo que hacemos es derivar las funciones parciales  $x \mapsto f(x, b)$  y  $y \mapsto f(a, y)$  en los puntos  $x = a$  e  $y = b$  respectivamente.

La gráfica de  $f$ , es decir, el conjunto  $S = \{(x, y, f(x, y)) : (x, y) \in E\}$  es una superficie en  $\mathbb{R}^3$ . Las funciones

$$\gamma_1(x) = (x, b, f(x, b)), \quad \gamma_2(y) = (a, y, f(a, y))$$

son curvas contenidas en dicha superficie que pasan por el punto  $(a, b)$ . Dichas curvas se obtienen cortando la superficie  $S$  por los planos  $y = b$  y  $x = a$  respectivamente. Los vectores tangentes a dichas curvas en los puntos  $\gamma_1(a)$  y  $\gamma_2(b)$  son, respectivamente

$$\gamma_1'(a) = (1, 0, D_1 f(a, b)), \quad \gamma_2'(b) = (0, 1, D_2 f(a, b))$$

En la figura (1.1) se ha representado la gráfica de  $f$  y las curvas obtenidas cortándola por los planos  $x = a$  e  $y = b$  junto a sus vectores tangentes en el punto  $(a, b)$

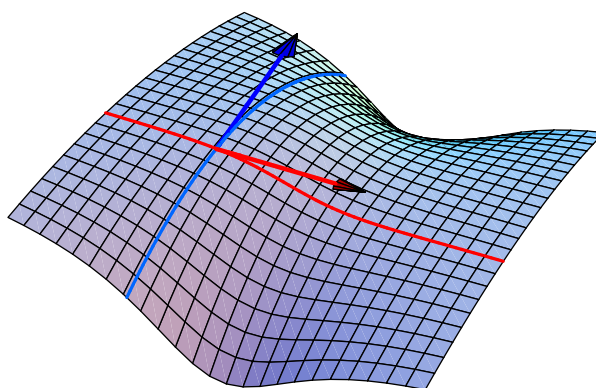


Figura 1.1: Derivadas parciales

Cuando un campo escalar  $f$  tiene derivadas parciales en todos los puntos de un conjunto  $E \subset \mathbb{R}^n$ , podemos definir las *funciones derivadas parciales* de  $f$ ,

$D_k f : E \rightarrow \mathbb{R}$  que a cada punto  $\mathbf{x} \in E$  hace corresponder el número  $D_k f(\mathbf{x})$ . Dichas funciones son también campos escalares.

**1.19 Definición.** Sea  $f$  un campo escalar. Se define el **vector gradiente** de  $f$  en un punto  $\mathbf{a}$  como el vector

$$\nabla f(\mathbf{a}) = (D_1 f(\mathbf{a}), D_2 f(\mathbf{a}), \dots, D_n f(\mathbf{a}))$$

supuesto, claro está, que dichas derivadas parciales existan.

Supongamos que  $f$  es una función real de una variable real. La derivabilidad de  $f$  en un punto  $a \in \mathbb{R}$  se expresa por

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a) \iff \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a) - f'(a)(x - a)}{x - a} = 0$$

Recuerda que la recta de ecuación cartesiana  $y = f(a) + f'(a)(x - a)$  es la recta tangente a la gráfica de  $f$  en el punto  $(a, f(a))$ .

Si ahora  $f$  es un campo escalar definido en un conjunto  $E \subset \mathbb{R}^n$ , cuyo vector gradiente  $\nabla f(\mathbf{a})$  está definido en un punto  $\mathbf{a} \in E$ , podemos considerar el hiperplano en  $\mathbb{R}^{n+1}$  de ecuación cartesiana  $x_{n+1} = f(\mathbf{a}) + \langle \nabla f(\mathbf{a}) | \mathbf{x} - \mathbf{a} \rangle$ . Este hiperplano pasa por el punto  $(\mathbf{a}, f(\mathbf{a})) \in \mathbb{R}^{n+1}$  y es la generalización natural de la recta tangente a la gráfica de una función. Observa el parecido formal entre las expresiones

$$y = f(a) + f'(a)(x - a), \quad x_{n+1} = f(\mathbf{a}) + \langle \nabla f(\mathbf{a}) | \mathbf{x} - \mathbf{a} \rangle$$

Ambas representan hiperplanos (un hiperplano en  $\mathbb{R}^2$  es una recta) y la segunda se deduce de la primera sustituyendo la derivada por el vector gradiente y el producto usual de números reales por el producto escalar de vectores. Esto nos lleva a la siguiente definición.

### 1.3.2. Campos escalares diferenciables

**1.20 Definición.** Sea  $f$  un campo escalar definido en un conjunto  $E \subset \mathbb{R}^n$  y sea  $\mathbf{a}$  un punto interior de  $E$ . Supongamos que está definido el vector gradiente  $\nabla f(\mathbf{a})$ . Se dice que  $f$  es **diferenciable** en  $\mathbf{a}$  si se verifica que

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} \frac{f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{a}) - \langle \nabla f(\mathbf{a}) | \mathbf{x} - \mathbf{a} \rangle}{\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|} = 0 \quad (1.8)$$

Definamos

$$R(\mathbf{x}, \mathbf{a}) = \frac{f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{a}) - \langle \nabla f(\mathbf{a}) | \mathbf{x} - \mathbf{a} \rangle}{\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|}$$

La igualdad (1.8) dice que  $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} R(\mathbf{x}, \mathbf{a}) = 0$ . Con lo que, otra forma equivalente de escribir la igualdad (1.8) es la siguiente.

$$f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a}) + \langle \nabla f(\mathbf{a}) | \mathbf{x} - \mathbf{a} \rangle + R(\mathbf{x}, \mathbf{a}) \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| \quad \text{donde} \quad \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} R(\mathbf{x}, \mathbf{a}) = 0 \quad (1.9)$$

**1.21 Definición.** Sea  $f$  un campo escalar diferenciable en un punto  $\mathbf{a}$ . El hiperplano en  $\mathbb{R}^{n+1}$  de ecuación cartesiana

$$x_{n+1} = f(\mathbf{a}) + \langle \nabla f(\mathbf{a}) | \mathbf{x} - \mathbf{a} \rangle$$

se llama hiperplano tangente a  $f$  en  $\mathbf{a}$  o **hiperplano tangente** a la gráfica de  $f$  en el punto  $(\mathbf{a}, f(\mathbf{a}))$ .

**1.22 Proposición.** Sea  $f$  un campo escalar diferenciable en un punto  $\mathbf{a}$  y sea  $\mathbf{u}$  una dirección en  $\mathbb{R}^n$ . Entonces se verifica que

$$D_{\mathbf{u}}f(\mathbf{a}) = \langle \nabla f(\mathbf{a}) | \mathbf{u} \rangle$$

**Demostración.** En la igualdad (1.9) pongamos  $\mathbf{x} = \mathbf{a} + t\mathbf{u}$  con lo que obtenemos

$$\begin{aligned} f(\mathbf{a} + t\mathbf{u}) &= f(\mathbf{a}) + \langle \nabla f(\mathbf{a}) | t\mathbf{u} \rangle + R(\mathbf{a} + t\mathbf{u}, \mathbf{a}) \|t\mathbf{u}\| = \\ &= f(\mathbf{a}) + t \langle \nabla f(\mathbf{a}) | \mathbf{u} \rangle + R(\mathbf{a} + t\mathbf{u}, \mathbf{a}) |t| \end{aligned}$$

De donde se sigue que

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{a} + t\mathbf{u}) - f(\mathbf{a})}{t} = \langle \nabla f(\mathbf{a}) | \mathbf{u} \rangle$$

**1.23 Corolario.** Sea  $f$  un campo escalar diferenciable en un punto  $\mathbf{a}$  con vector gradiente no nulo en  $\mathbf{a}$ .

a) La dirección en la que la derivada direccional de  $f$  en  $\mathbf{a}$  es máxima es la dirección dada por el gradiente, es decir, la dirección  $\mathbf{u} = \frac{\nabla f(\mathbf{a})}{\|\nabla f(\mathbf{a})\|}$ .

b) La dirección en la que la derivada direccional de  $f$  en  $\mathbf{a}$  es mínima es la dirección opuesta a la dada por el gradiente, es decir, la dirección  $\mathbf{v} = -\frac{\nabla f(\mathbf{a})}{\|\nabla f(\mathbf{a})\|}$ .

**Demostración.** Las afirmaciones hechas son consecuencia de la proposición anterior y de la desigualdad de Cauchy-Schwarz, pues para toda dirección  $\mathbf{w}$  se tiene que

$$|\langle \nabla f(\mathbf{a}) | \mathbf{w} \rangle| \leq \|\nabla f(\mathbf{a})\| \|\mathbf{w}\| = \|\nabla f(\mathbf{a})\|$$

Y la igualdad se da si, y solo si, hay un número  $\lambda \in \mathbb{R}$  tal que  $\mathbf{w} = \lambda \nabla f(\mathbf{a})$ . Tomando normas en esta igualdad se deduce que  $|\lambda| = 1/\|\nabla f(\mathbf{a})\|$ , es decir las direcciones  $\mathbf{w}$  que hacen máximo  $|D_{\mathbf{w}}f(\mathbf{a})| = |\langle \nabla f(\mathbf{a}) | \mathbf{w} \rangle|$  son  $\mathbf{u} = \frac{\nabla f(\mathbf{a})}{\|\nabla f(\mathbf{a})\|}$  y  $\mathbf{v} = -\frac{\nabla f(\mathbf{a})}{\|\nabla f(\mathbf{a})\|}$ .

Para la primera se tiene que

$$D_{\mathbf{u}}f(\mathbf{a}) = \left\langle \nabla f(\mathbf{a}) \left| \frac{\nabla f(\mathbf{a})}{\|\nabla f(\mathbf{a})\|} \right. \right\rangle = \frac{1}{\|\nabla f(\mathbf{a})\|} \langle \nabla f(\mathbf{a}) | \nabla f(\mathbf{a}) \rangle = \|\nabla f(\mathbf{a})\|$$

que es el valor máximo que puede tener una derivada direccional.

Análogamente, para la segunda se tiene que

$$D_{\mathbf{v}}f(\mathbf{a}) = -\|\nabla f(\mathbf{a})\|$$

que es el valor mínimo que puede tener una derivada direccional.  $\square$

*El resultado anterior nos dice que el vector gradiente en un punto señala la dirección en la que el campo tiene máximo crecimiento en dicho punto. Mientras que en la dirección opuesta a la del vector gradiente en un punto el campo tiene máximo decrecimiento.*

**1.24 Proposición.** Sean  $f$  un campo escalar definido en un conjunto  $E \subset \mathbb{R}^n$  y  $\gamma$  una curva en  $\mathbb{R}^n$  que toma valores en el conjunto  $E$ . Supongamos que  $\gamma$  es derivable en un punto  $t_0$  y que  $f$  es diferenciable en el punto  $\mathbf{a} = \gamma(t_0) \in E$ . Entonces se verifica que la función  $h(t) = f(\gamma(t))$  es derivable en  $t_0$  y su derivada viene dada por

$$h'(t_0) = \langle \nabla f(\mathbf{a}) | \gamma'(t_0) \rangle = \sum_{k=1}^n D_k f(\mathbf{a}) \gamma'_k(t_0) \quad (1.10)$$

**Demostración.** Se tiene que

$$h(t) - h(t_0) = f(\gamma(t)) - f(\gamma(t_0)) = \langle \nabla f(\mathbf{a}) | \gamma(t) - \gamma(t_0) \rangle + R(\gamma(t), \gamma(t_0)) \|\gamma(t) - \gamma(t_0)\|$$

Dividiendo por  $t - t_0$  tenemos

$$\frac{h(t) - h(t_0)}{t - t_0} = \frac{f(\gamma(t)) - f(\gamma(t_0))}{t - t_0} = \left\langle \nabla f(\mathbf{a}) \left| \frac{\gamma(t) - \gamma(t_0)}{t - t_0} \right. \right\rangle + R(\gamma(t), \gamma(t_0)) \frac{\|\gamma(t) - \gamma(t_0)\|}{t - t_0}$$

Teniendo en cuenta que  $\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\gamma(t) - \gamma(t_0)}{t - t_0} = \gamma'(t_0)$  se deduce que

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{h(t) - h(t_0)}{t - t_0} = \langle \nabla f(\mathbf{a}) | \gamma'(t_0) \rangle$$

como queríamos demostrar.  $\square$

Que un campo escalar tenga derivadas parciales en un punto es una propiedad muy débil. Por ejemplo, el campo escalar  $f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$ ,  $f(0, 0) = 0$  tiene derivadas parciales nulas en  $(0, 0)$  pero no es continuo en dicho punto. La propiedad de



ser diferenciable es mucho más fuerte que tener derivadas parciales. Por ejemplo, es fácil probar que **un campo escalar diferenciable en un punto es continuo en dicho punto**. El siguiente resultado proporciona una condición suficiente de diferenciability muy útil.

**1.25 Teorema (Condición suficiente de diferenciability).** *Un campo escalar que tiene derivadas parciales continuas en un conjunto abierto es diferenciable en todo punto de dicho conjunto.*

En la práctica suele suponerse que los campos escalares tienen derivadas parciales continuas. Esta hipótesis garantiza que son diferenciables y es suficiente para justificar la mayoría de los resultados que siguen.

Es sabido que una función derivable en un intervalo con derivada nula es constante. Para campos escalares hay un resultado análogo. Observa la hipótesis de que el campo esté definido en un *dominio*.

**1.26 Proposición.** *Un campo escalar definido en un dominio con derivadas parciales nulas en todo punto del mismo es constante.*

En la siguiente sección te digo cómo calcular rectas y planos tangentes a curvas y superficies considerando las distintas formas en que éstas pueden venir dadas. Mi propósito es esencialmente práctico, a saber, que entiendas la forma de proceder en cada caso; por lo que no me preocupo de justificar con detalle todo lo que digo.

## 1.4. Rectas tangentes y planos tangentes

### 1.4.1. Curvas en el plano

Una curva  $\Gamma$  en el plano puede venir dada de tres formas:

a) Como la *gráfica de una función*  $y = f(x)$  donde  $x \in I$  siendo  $I$  un intervalo de  $\mathbb{R}$ .

$$\Gamma = \{(x, f(x)) : x \in I\}$$

b) Por medio de *ecuaciones paramétricas*  $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ .

$$\Gamma = \gamma(I) = \{(x(t), y(t)) : t \in I\}$$

c) De *forma implícita* como el conjunto de puntos  $g(x, y) = 0$  donde se anula una función diferenciable de dos variables.

$$\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : g(x, y) = 0\}$$

Observa que **a)** es un caso particular de **c)** (basta considerar  $g(x, y) = f(x) - y$ ) y también es un caso particular de **b)** (basta considerar  $\gamma(x) = (x, f(x))$ ).

La tangente en un punto de  $\Gamma$  viene dada en cada caso como sigue.

**a')** La tangente en un punto  $(a, b) = (a, f(a)) \in \Gamma$  es la recta de ecuación cartesiana  $y - b = f'(a)(x - a)$ . El vector  $(1, f'(a))$  es tangente a  $\Gamma$  en el punto  $(a, b)$  y el vector  $(f'(a), -1)$  es ortogonal a  $\Gamma$  en el punto  $(a, b)$ .

**b')** La tangente en un punto  $\gamma(t_0) = (a, b) \in \Gamma$  es la recta de ecuaciones paramétricas

$$(x, y) = \gamma(t_0) + t\gamma'(t_0) = (a, b) + t(x'(t_0), y'(t_0))$$

El vector  $\gamma'(t_0) = (x'(t_0), y'(t_0))$  es tangente a  $\Gamma$  en  $(a, b)$ .

**c')** La tangente en un punto  $(a, b) \in \Gamma$  es la recta de ecuación implícita

$$\langle \nabla g(a, b) | (x - a, y - b) \rangle = 0$$

Se supone que  $\nabla g(a, b) \neq 0$  pues en otro caso, la tangente en  $(a, b)$  no está definida. El vector gradiente  $\nabla g(a, b)$  es ortogonal a  $\Gamma$  en el punto  $(a, b)$ .

Suele usarse la siguiente terminología. Si  $g(x, y)$  es un campo escalar diferenciable, las curvas de ecuación implícita  $g(x, y) = c$  o, lo que es igual  $g(x, y) - c = 0$ , donde  $c$  es una constante, se llaman *curvas de nivel*. Dichas curvas se obtienen cortando la gráfica de  $g$  con planos de la forma  $z = c$ . Estas curvas son las que ves representadas en los mapas topográficos. De lo antes visto, merece la pena destacar la siguiente propiedad. *Supuesto que  $\nabla g(a, b) \neq 0$ , se verifica que el vector gradiente  $\nabla g(a, b)$  es ortogonal en el punto  $(a, b)$  a la curva de nivel dada por  $g(x, y) = g(a, b)$ .*

### 1.4.2. Superficies en $\mathbb{R}^3$

Una superficie  $S$  en el espacio  $\mathbb{R}^3$  puede venir dada de tres formas:

**a)** Como la gráfica de una función  $y = f(x, y)$  donde  $(x, y) \in A$  siendo  $A$  un conjunto de  $\mathbb{R}^2$ .

$$S = \{(x, y, f(x, y)) : (x, y) \in A\}$$

**b)** Por medio de ecuaciones paramétricas  $\gamma(s, t) = (x(s, t), y(s, t), z(s, t))$  donde  $(s, t) \in A \subset \mathbb{R}^2$ .

$$S = \gamma(A) = \{(x(s, t), y(s, t), z(s, t)) : (s, t) \in A\}$$

- c) De forma implícita como el conjunto de puntos  $g(x, y, z) = 0$  donde se anula una función diferenciable de tres variables.

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : g(x, y, z) = 0\}$$

Observa que **a)** es un caso particular de **c)** (basta considerar  $g(x, y, z) = f(x, y) - z$ ) y también es un caso particular de **b)** (basta considerar  $\gamma(s, t) = (s, t, f(s, t))$ ). El plano tangente en un punto de  $S$  viene dada en cada caso como sigue.

- a') El plano tangente en un punto  $(a, b, c) = (a, b, f(a, b)) \in S$  es el plano de ecuación cartesiana

$$z - f(a, b) = \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)(x - a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)(y - b)$$

Los vectores  $\left(1, 0, \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)\right)$  y  $\left(0, 1, \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)\right)$  son tangentes a  $S$  en  $(a, b, c)$  y el vector

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}(a, b), \frac{\partial f}{\partial y}(a, b), -1\right)$$

es ortogonal a  $S$  en el punto  $(a, b, c)$ .

- b') El plano tangente en un punto  $\gamma(s_0, t_0) = (a, b, c) \in S$  es el plano de ecuaciones paramétricas

$$(x, y, z) = \gamma(s_0, t_0) + s \frac{\partial \gamma}{\partial s}(s_0, t_0) + t \frac{\partial \gamma}{\partial t}(s_0, t_0)$$

Donde

$$\frac{\partial \gamma}{\partial s}(s_0, t_0) = \left(\frac{\partial x}{\partial s}(s_0, t_0), \frac{\partial y}{\partial s}(s_0, t_0), \frac{\partial z}{\partial s}(s_0, t_0)\right)$$

y

$$\frac{\partial \gamma}{\partial t}(s_0, t_0) = \left(\frac{\partial x}{\partial t}(s_0, t_0), \frac{\partial y}{\partial t}(s_0, t_0), \frac{\partial z}{\partial t}(s_0, t_0)\right)$$

Dichos vectores son tangentes a  $S$  en  $(a, b, c)$ .

- c') El plano tangente en un punto  $(a, b, c) \in S$  es el plano de ecuación implícita

$$\langle \nabla g(a, b, c) | (x - a, y - b, z - c) \rangle = 0$$

Se supone que  $\nabla g(a, b, c) \neq 0$  pues en otro caso, el plano tangente a  $S$  en  $(a, b, c)$  no está definido. El vector gradiente  $\nabla g(a, b, c)$  es ortogonal a  $S$  en el punto  $(a, b, c)$ .

Si  $g(x, y, z)$  es un campo escalar, las superficies de ecuación implícita  $g(x, y, z) = c$  o, lo que es igual  $g(x, y, z) - c = 0$ , donde  $c$  es una constante, se llaman *superficies*

de nivel (cuando el campo se interpreta como un potencial se llaman *superficies equipotenciales*). De lo dicho en c'), se sigue que si  $\nabla g(a, b, c) \neq \mathbf{0}$  se verifica que el vector gradiente  $\nabla g(a, b, c)$  es ortogonal en  $(a, b, c)$  a la superficie de nivel  $g(x, y, z) = g(a, b, c)$ .

### 1.4.3. Curvas en $\mathbb{R}^3$

Una curva  $\Gamma$  en el espacio puede venir dada de dos formas.

- a) Como intersección de dos superficies  $S_1$  y  $S_2$ .
- b) Por medio de ecuaciones paramétricas  $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$  donde  $t \in I \subset \mathbb{R}$  e  $I$  es un intervalo.

$$\Gamma = \gamma(I) = \{(x(t), y(t), z(t)) : t \in I\}$$

La tangente en un punto de  $\Gamma$  viene dada en cada caso como sigue.

- a') La tangente en un punto  $(a, b, c) \in \Gamma$  es la recta intersección de los planos tangentes a  $S_1$  y a  $S_2$  en  $(a, b, c)$ . Por ejemplo, si las superficies vienen dadas por sus ecuaciones implícitas.

$$\begin{cases} S_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : f(x, y, z) = 0\} \\ S_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : g(x, y, z) = 0\} \end{cases} \quad \Gamma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : g(x, y, z) = f(x, y, z) = 0\}$$

Entonces, las ecuaciones implícitas de la recta tangente son

$$\begin{cases} \langle \nabla f(a, b, c) | (x - a, y - b, z - c) \rangle = 0 \\ \langle \nabla g(a, b, c) | (x - a, y - b, z - c) \rangle = 0 \end{cases}$$

Donde se supone que los vectores gradiente  $\nabla f(a, b, c)$ ,  $\nabla g(a, b, c)$  son linealmente independientes pues, en otro caso, la recta tangente a la curva  $\Gamma$  en  $(a, b, c)$  no está definida.

- b') La tangente en un punto  $\gamma(t_0) = (a, b, c) \in \Gamma$  es la recta de ecuaciones paramétricas

$$(x, y, z) = \gamma(t_0) + t\gamma'(t_0) = (a, b, c) + t(x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0))$$

El vector  $\gamma'(t_0) = (x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0))$  es tangente a  $\Gamma$  en  $(a, b, c)$ .

#### 1.4.4. Derivadas parciales de orden superior

Supongamos un campo escalar  $f$  que tiene derivadas parciales  $D_k f$  en un conjunto  $E \subset \mathbb{R}^n$ . Las funciones  $D_k f$  son también campos escalares que podemos, cuando se dejen, volver a derivar parcialmente en puntos de  $E$ . Obtenemos de esta forma las *derivadas parciales de segundo orden* de  $f$ , es decir las funciones  $D_j(D_k f)$ , que se representan simbólicamente de las formas

$$D_{jk}f(\mathbf{x}), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}(\mathbf{x}), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_k^2}(\mathbf{x})$$

De forma análoga se definen las derivadas parciales de tercer orden de  $f$  como las derivadas parciales de las derivadas parciales de segundo orden de  $f$  y se representan por

$$D_{jkm}f(\mathbf{x}), \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x_j \partial x_k \partial x_m}(\mathbf{x}); \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x_k^3}(\mathbf{x}); \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x_k^2 \partial x_j}(\mathbf{x})$$

Es natural preguntarse si el orden en que se realizan las derivadas debe ser o no tenido en cuenta. Afortunadamente, en la mayoría de los casos podemos olvidarlo porque se verifica el siguiente resultado.

**1.27 Definición.** Se dice que un campo escalar  $f$  es de clase  $C^k$  en un abierto  $E \subset \mathbb{R}^n$  si  $f$  tiene derivadas parciales de orden  $k$  continuas en  $E$ .

**1.28 Teorema.** *Las derivadas parciales de orden menor o igual que  $k$  de un campo escalar de clase  $C^k$  solamente dependen del número de veces que se deriva parcialmente respecto de cada variable, pero el orden en que se realicen dichas derivaciones no afecta para nada al resultado final.*

#### 1.4.5. Ejercicios propuestos

---

Como para calcular derivadas parciales de una función de varias variables se consideran fijas todas las variables menos aquella respecto a la que se deriva, calcular derivadas parciales es lo mismo que derivar funciones de una variable. Solamente debes tener cuidado para darte cuenta qué tipo de función es la que tienes que derivar porque ello puede depender de la variable respecto de la que derivas. Por ejemplo, la función  $f(x, y) = x^y$  cuando fijas  $y$  (para derivar respecto a  $x$ ) es una función potencia (la variable está en la base y el exponente está fijo) y cuando fijas  $x$  (para derivar respecto a  $y$ ) es una función exponencial (la variable está en el exponente y la base está fija).

Te recuerdo que es muy frecuente, sobre todo en libros de Física e ingenierías diversas, representar las funciones por letras. Así, lo que los matemáticos solemos escribir  $f(x, y) = \cos(xy) + xy^2$ , para indicar que  $f$  es una función de dos variables  $x$  e  $y$  cuyo valor en el punto  $(x, y)$  viene dado por  $\cos(xy) + xy^2$ , suele expresarse de forma menos precisa en la forma  $z = \cos(xy) + xy^2$ , cuyo significado es exactamente el mismo que el anterior cambiando  $f$  por  $z$ . Naturalmente, en vez de  $z$  puede usarse cualquier otro símbolo que sea distinto de  $x$  e  $y$ . Tienes que acostumbrarte a esta notación y entender cuándo una letra representa una variable y cuándo representa una función.

**21.** Calcula las derivadas parciales de primer orden de los campos escalares:

$$(a) f(x, y) = x^2y + z^2x + y \operatorname{sen}(xz) \quad (b) z = (x^2 + y^3)e^{-xy} \quad (c) w = xe^z + ze^y + xyz.$$

**22.** Calcula las derivadas parciales de primer y segundo orden del campo  $f(x, y, z) = \frac{xy}{1 + y^2 + z^2}$ .

**23.** Calcula las derivadas parciales de primer y segundo orden de los campos escalares:

$$(a) z = \operatorname{sen}(\cos(e^{xy})) \quad (b) w = \log(4 + \operatorname{arctg}(x/y)) \quad (c) u = \operatorname{tg}((xy)^z)$$

Te recuerdo que una dirección viene dada por un vector de norma euclídea 1. Si  $\mathbf{a}$  y  $\mathbf{b}$  son puntos de  $\mathbb{R}^n$  la dirección del punto  $\mathbf{a}$  hacia el punto  $\mathbf{b}$  viene dada por el vector  $\frac{\mathbf{b} - \mathbf{a}}{\|\mathbf{b} - \mathbf{a}\|}$ .

**24.** Calcula la derivada direccional de  $f(x, y) = \log(1 + \sqrt{x^2 + y^2})$  en el punto  $(1, 2)$  en la dirección hacia el origen.

**25.** Calcula la derivada direccional de  $z(x, y) = \operatorname{arctg}\left(\frac{xy}{x^2 + y^2}\right)$  en el punto  $(1, 1)$  en la dirección hacia el punto  $(2, 1)$ .

**26.** Calcula valores de  $a$ ,  $b$  y  $c$  para que la derivada direccional de la función

$$f(x, y, z) = axy^2 + byz + cz^2x^3$$

en el punto  $(1, 2, -1)$  tenga un valor máximo igual a 64 en la dirección del eje OZ.

**27.** Calcula la ecuación de la recta tangente y de la recta normal a la elipse de ecuación

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

en un punto  $(u, v)$  de la misma.

**28.** Considera la curva dada por las ecuaciones paramétricas  $x(t) = e^t + \cos t$ ,  $y(t) = e^{-t} + \sin t$ . Calcula la ecuación de la recta tangente en el punto  $(x(0), y(0))$ .

**28.** Calcula, para los siguientes campos escalares, el vector normal en  $P_0$  a la curva de nivel que pasa por dicho punto.

$$1. f(x, y) = \operatorname{arctg} \left( \frac{y}{\sqrt{1+x^2+y^2}} \right) \quad P_0 = (1, 1).$$

$$2. f(x, y) = \frac{\operatorname{sen}(x+y)}{2 + \cos(x-y)} \quad P_0 = (\pi/2, \pi/4).$$

**29.** Calcula la derivada de  $h(x, y) = \frac{x-y}{1 + \log(1+x^2y^2)}$  en el punto  $(-1, -1)$  en la dirección dada por el vector ortogonal (de norma 1) en el punto  $(1, 1)$  a la curva de nivel del campo  $f(x, y) = xy^3 + x^3y$  que pasa por dicho punto.

**30.** Calcula las ecuaciones del plano tangente y de la recta normal a cada una de las siguientes superficies en el punto  $P_0$  indicado.

$$\begin{aligned} z^2 - 2x^2 - 2y^2 - 12 = 0, \quad P_0(1, -1, 4); \quad z - \log(x^2 + y^2) = 0, \quad P_0(1, 0, 0) \\ z(xy - 1) - (x + y) = 0, \quad P_0(1, 2, 3); \quad 4 - x^2 - 4z^2 = y, \quad P_0(0, 0, 1) \end{aligned}$$

**31.** Halla la ecuación de la tangente a la curva dada como intersección del elipsoide  $x^2 + 4y^2 + 2z^2 = 27$  y el hiperboloide  $x^2 + y^2 - 2z^2 = 11$  en el punto  $(3, -2, 1)$ .

**32.** Calcula la ecuación de la recta tangente a la curva definida por la intersección de las superficies  $z = xy$ ,  $x^2 + y^2 - 2z = 4$  en el punto  $(3, 1, 3)$ . Comprueba el resultado expresando la curva por sus ecuaciones paramétricas.

**33.** Calcula la ecuación de la recta tangente a la curva definida por la intersección de las superficies  $4xz = (x+z)y$ ,  $3z^2 + y = 5x$  en el punto  $(1, 2, 1)$ .

## 1.5. Extremos relativos

**1.29 Definición.** Sea  $f$  un campo escalar definido en un conjunto  $E \subset \mathbb{R}^n$ . Se dice que  $f$  tiene un **máximo relativo** (resp. **mínimo relativo**) en un punto  $\mathbf{a} \in E$ , si  $\mathbf{a}$  es un punto interior de  $E$  y existe un número  $r > 0$  tal que  $B(\mathbf{a}, r) \subset E$  y  $f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{a})$  (resp.  $f(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{a})$ ).

(resp.  $f(\mathbf{a}) \leq f(\mathbf{x})$ ) para todo  $\mathbf{x} \in B(\mathbf{a}, r)$ . Cuando estas desigualdades se verifican de forma estricta se dice que el máximo o el mínimo relativo es estricto.

Los puntos en los que  $f$  tiene un máximo o un mínimo relativos se llaman **extremos relativos** de  $f$ .

**1.30 Proposición (Condición necesaria de extremo relativo).** *Sea  $f$  un campo escalar definido en un conjunto  $E \subset \mathbb{R}^n$  y supongamos que  $f$  tiene un extremo relativo en un punto  $\mathbf{a} \in E$  y además que el vector gradiente de  $f$  en  $\mathbf{a}$  está definido. Entonces se verifica que  $\nabla f(\mathbf{a}) = \mathbf{0}$ . Es decir, las derivadas parciales de primer orden de  $f$  en  $\mathbf{a}$  son todas nulas.*

**Demostración.** Supongamos que  $f$  tiene un máximo relativo en  $\mathbf{a}$  y sea  $r > 0$  tal que  $B(\mathbf{a}, r) \subset E$  y  $f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{a})$  para todo  $\mathbf{x} \in B(\mathbf{a}, r)$ . Definamos  $\varphi: ]-r, r[ \rightarrow \mathbb{R}$  por  $\varphi(t) = f(\mathbf{a} + t\mathbf{e}_k)$ . La función  $\varphi$  está definida en el intervalo  $] -r, r[$  pues para todo  $t \in ] -r, r[$  se tiene que  $\|\mathbf{a} + t\mathbf{e}_k - \mathbf{a}\| = |t| < r$  por lo que  $\mathbf{a} + t\mathbf{e}_k \in B(\mathbf{a}, r) \subset E$ . Además, para todo  $t \in ] -r, r[$  se tiene que  $\varphi(t) = f(\mathbf{a} + t\mathbf{e}_k) \leq f(\mathbf{a}) = \varphi(0)$ . Luego  $\varphi$  tiene en  $t = 0$  un máximo relativo. Además como, por hipótesis, existe  $D_k f(\mathbf{a})$ , tenemos que  $\varphi$  es derivable en  $t = 0$ . Luego  $\varphi'(0) = 0$ , pero  $\varphi'(0) = D_k f(\mathbf{a})$ .  $\square$

**1.31 Definición.** Los puntos donde se anula el gradiente de un campo escalar  $f$  se llaman **puntos críticos** de  $f$ . Los puntos críticos de un campo escalar que no son extremos relativos se llaman **puntos de silla**.

Si  $f$  es un campo escalar diferenciable, en los puntos críticos el hiperplano tangente es “horizontal”.

La condición necesaria de extremo relativo no es suficiente. Por ejemplo, el campo escalar  $f(x, y) = x^2 - y^2$  tiene un punto crítico en  $(0, 0)$ , pero no tiene extremo relativo en dicho punto pues en toda bola centrada en  $(0, 0)$  toma valores positivos y negativos.

Al igual que para funciones de una variable, la derivada segunda proporciona una condición suficiente de extremo relativo, para campos escalares de varias variables las derivadas parciales de segundo orden nos van a permitir dar una condición suficiente de extremo relativo. Necesitaremos para ello el siguiente resultado.

**1.32 Proposición.** *Sea  $f$  un campo escalar definido en un conjunto  $E \subset \mathbb{R}^n$  y supongamos que  $f$  tiene derivadas parciales de segundo orden continuas en un punto  $\mathbf{a}$  interior de  $E$ . Sea  $r > 0$  tal que  $B(\mathbf{a}, r) \subset E$ . Entonces para todo  $\mathbf{x}$  con  $\|\mathbf{x}\| < r$  se tiene*



que

$$f(\mathbf{a} + \mathbf{x}) = f(\mathbf{a}) + \sum_{k=1}^n D_k f(\mathbf{a}) x_k + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n D_{jk} f(\mathbf{a}) x_k x_j + \|\mathbf{x}\|^2 \varphi(\mathbf{x}) \quad \text{con} \quad \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{0}} \varphi(\mathbf{x}) = 0 \quad (1.11)$$

**1.33 Definición.** Sea  $f$  un campo escalar de  $n$  variables que tiene derivadas parciales de segundo orden continuas en un punto  $\mathbf{a}$ . La matriz  $n \times n$

$$H(f, \mathbf{a}) = (D_{ij} f(\mathbf{a}))_{1 \leq i, j \leq n}$$

se llama **matriz hesiana** de  $f$  en  $\mathbf{a}$ .

Observa que la matriz hesiana es simétrica porque  $D_{ij} f(\mathbf{a}) = D_{ji} f(\mathbf{a})$ . En consecuencia, dicha matriz define una forma cuadrática, que representaremos por  $Q(f, \mathbf{a})$ , que viene dada para todo  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$  por

$$Q(f, \mathbf{a})(\mathbf{x}) = \mathbf{x} \cdot H(f, \mathbf{a}) \cdot \mathbf{x}^t = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n D_{jk} f(\mathbf{a}) x_k x_j$$

donde el punto “ $\cdot$ ” indica producto matricial y  $\mathbf{x}^t$  es el vector columna  $\mathbf{x}$ . Con esta notación podemos escribir la igualdad (1.11) en la forma

$$f(\mathbf{a} + \mathbf{x}) = f(\mathbf{a}) + \langle \nabla f(\mathbf{a}) | \mathbf{x} \rangle + \frac{1}{2} Q(f, \mathbf{a})(\mathbf{x}) + \|\mathbf{x}\|^2 \varphi(\mathbf{x}) \quad \text{donde} \quad \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{0}} \varphi(\mathbf{x}) = 0 \quad (1.12)$$

Si suponemos que  $\mathbf{a}$  es un punto crítico de  $f$  podemos escribir

$$f(\mathbf{a} + \mathbf{x}) = f(\mathbf{a}) + \frac{1}{2} Q(f, \mathbf{a})(\mathbf{x}) + \|\mathbf{x}\|^2 \varphi(\mathbf{x}) \quad \text{donde} \quad \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{0}} \varphi(\mathbf{x}) = 0 \quad (1.13)$$

De donde se sigue que

$$\frac{f(\mathbf{a} + \mathbf{x}) - f(\mathbf{a})}{\|\mathbf{x}\|^2} = \frac{1}{2 \|\mathbf{x}\|^2} Q(f, \mathbf{a})(\mathbf{x}) + \varphi(\mathbf{x}) \quad \text{donde} \quad \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{0}} \varphi(\mathbf{x}) = 0$$

Teniendo en cuenta que las formas cuadráticas son polinomios homogéneos de grado 2, es decir,  $Q(f, \mathbf{a})(\lambda \mathbf{x}) = \lambda^2 Q(f, \mathbf{a})(\mathbf{x})$ , se tiene  $\frac{1}{2 \|\mathbf{x}\|^2} Q(f, \mathbf{a})(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} Q(f, \mathbf{a}) \left( \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|} \right)$ .

Resulta así la igualdad

$$\frac{f(\mathbf{a} + \mathbf{x}) - f(\mathbf{a})}{\|\mathbf{x}\|^2} = \frac{1}{2} Q(f, \mathbf{a})(\mathbf{x} / \|\mathbf{x}\|) + \varphi(\mathbf{x}) \quad \text{donde} \quad \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{0}} \varphi(\mathbf{x}) = 0 \quad (1.14)$$

**1.34 Definición.** Una forma cuadrática  $Q(\mathbf{x}) = \sum_{i,j=1}^n \alpha_{ij} x_i x_j$  se llama:

- **Definida positiva** si  $Q(\mathbf{x}) > 0$  para todo  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  con  $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ .

- **Semidefinida positiva** si  $Q(\mathbf{x}) \geq 0$  para todo  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ .
- **Definida negativa** si  $Q(\mathbf{x}) < 0$  para todo  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  con  $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ .
- **Semidefinida negativa** si  $Q(\mathbf{x}) \leq 0$  para todo  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ .
- **No definida** si toma valores positivos y negativos.

**1.35 Teorema.** Sea  $f$  un campo escalar definido en un conjunto  $E \subset \mathbb{R}^n$  y supongamos que  $f$  tiene derivadas parciales de segundo orden continuas en un punto  $\mathbf{a}$  interior de  $E$  que además es un punto crítico de  $f$ . Sea  $Q(f, \mathbf{a})$  la forma cuadrática asociada a la matriz hesiana de  $f$  en  $\mathbf{a}$ .

$$Q(f, \mathbf{a})(\mathbf{x}) = \mathbf{x} \cdot H(f, \mathbf{a}) \cdot \mathbf{x}^t = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n D_{jk} f(\mathbf{a}) x_k x_j$$

a) Si la forma cuadrática  $Q(f, \mathbf{a})$  es definida positiva entonces  $f$  tiene en  $\mathbf{a}$  un mínimo relativo estricto.

b) Si la forma cuadrática  $Q(f, \mathbf{a})$  es definida negativa entonces  $f$  tiene en  $\mathbf{a}$  un máximo relativo estricto.

c) Si la forma cuadrática  $Q(f, \mathbf{a})$  es no definida entonces  $f$  tiene un punto de silla en  $\mathbf{a}$ .

Para poder usar el resultado anterior hay que saber clasificar una forma cuadrática. Hay varios procedimientos sencillos para ello. Los dos que siguen a continuación son los que me parecen más cómodos.

### Clasificación de formas cuadráticas

Sean  $\mathcal{A} = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$  una matriz simétrica de números reales y

$$Q_{\mathcal{A}}(\mathbf{x}) = \mathbf{x} \cdot \mathcal{A} \cdot \mathbf{x}^t = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x^i x^j \quad (1.15)$$

la forma cuadrática definida por  $\mathcal{A}$ . Los *valores propios* de  $\mathcal{A}$  son las raíces del polinomio característico  $p(\lambda)$ , que se define como el determinante de la matriz  $\mathcal{A} - \lambda I$ :

$$p(\lambda) = |\mathcal{A} - \lambda I|$$

Es sabido que, en la situación que estamos considerando, las raíces de dicho polinomio son todas reales.

Sean  $\lambda_j$  ( $1 \leq j \leq n$ ) los valores propios de  $\mathcal{A}$ . Se demuestra que hay una base  $\mathbf{B} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n\}$  en  $\mathbb{R}^n$  tal que para todo vector  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  se tiene que

$$Q_{\mathcal{A}}(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^n \lambda_j x_j^2$$

donde  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  son las coordenadas del vector  $\mathbf{x}$  en la base  $\mathbf{B}$ . De aquí se siguen los siguientes criterios.

- La forma cuadrática  $Q_{\mathcal{A}}$  es definida positiva si, y sólo si, todos los valores propios de  $\mathcal{A}$  son positivos.
- La forma cuadrática  $Q_{\mathcal{A}}$  es definida negativa si, y sólo si, todos los valores propios de  $\mathcal{A}$  son negativos.
- La cuadrática  $Q_{\mathcal{A}}$  es no definida si, y sólo si,  $\mathcal{A}$  tiene valores propios positivos y negativos.
- La forma cuadrática  $Q_{\mathcal{A}}$  es semidefinida positiva si, y sólo si, todos los valores propios de  $\mathcal{A}$  son mayores o iguales que 0.
- La forma cuadrática  $Q_{\mathcal{A}}$  es semidefinida negativa si, y sólo si, todos los valores propios de  $\mathcal{A}$  son menores o iguales que 0.

Otro criterio para estudiar el carácter de la forma cuadrática (1.15) se basa en la sucesión de signos de los *menores principales* de la matriz  $\mathcal{A}$ . El menor principal de orden  $k$  es el determinante  $\Delta_k = |a_{i,j}|_{1 \leq i,j \leq k}$ . Se verifica que:

- Si todos los determinantes principales son positivos la forma cuadrática es definida positiva.
- Si los determinantes principales son todos distintos de cero y van alternando signo siendo el primero de ellos negativo, la forma cuadrática es definida negativa.
- Si los determinantes principales son nulos a partir de uno de ellos en adelante y los no nulos son positivos o van alternando signo siendo el primero de ellos negativo, no puede afirmarse nada.
- En los demás casos la forma cuadrática es no definida.

Observa que cuando la dimensión  $n$  es par, si el determinante de la matriz  $\mathcal{A}$  es negativo entonces la forma es no definida.

Podemos particularizar este criterio para el caso de dos dimensiones.

Sea  $A \subset \mathbb{R}^2$  un conjunto abierto y sea  $f$  un campo escalar definido en  $A$  que tiene derivadas parciales de segundo orden continuas. Supongamos que  $(a, b) \in A$  es un

punto crítico de  $f$  y sea

$$H(f, (a, b)) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a, b) \end{pmatrix}$$

la matriz hesiana de  $f$  en  $(a, b)$  y notemos  $\det H(f, (a, b))$  su determinante.

- Si  $\det H(f, (a, b)) > 0$  y  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b) > 0$  entonces  $f$  tiene en  $(a, b)$  un mínimo relativo estricto.
- Si  $\det H(f, (a, b)) > 0$  y  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b) < 0$  entonces  $f$  tiene en  $(a, b)$  un máximo relativo estricto.
- Si  $\det H(f, (a, b)) < 0$  entonces  $f$  no tiene extremo relativo en  $(a, b)$ . Se dice que  $(a, b)$  es un punto de silla de  $f$ .
- Cuando  $\det H(f, (a, b)) = 0$  el conocimiento de la matriz hesiana no permite decidir si hay o no hay extremo relativo en  $(a, b)$ . Cuando esto sucede puede ser interesante estudiar el comportamiento de las curvas  $f(a, t + b)$  y  $f(a + t, b)$ . Si alguna de dichas curvas no tiene extremo relativo o tienen extremos relativos de distinta naturaleza en  $t = 0$ , podemos concluir que en  $(a, b)$  no hay extremo relativo de  $f$ .

### 1.5.1. Ejercicios propuestos

---

**34.** Determinar los extremos relativos de las funciones:

$$\begin{array}{ll} f(x, y) = 2xy - 2x^3y - xy^2 + x^3y^2; & f(x, y) = -2x^3 - 6xy^2 + 3x^2 + 3y^2; \\ f(x, y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y; & f(x, y) = x^3 + y^3 - xy^2 - x + 16; \\ f(x, y) = -xy + 2x^3y - xy^2 - 2x^3y^2; & f(x, y) = \cos(x) \cos(y) \\ f(x, y) = 2x + y + x^2 + xy + y^3; & f(x, y) = x^2y^2 - x^2 - y^2; \\ f(x, y) = x^4 + y^4 - 4a^2xy \quad (a > 0); & f(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 - xyz - 3x - 3y - 3z; \\ f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + 3xyz - x - y - z; & f(x, y, z) = (x + y + z)e^{1-x^2-y^2-z^2} \end{array}$$

35. Clasifica los puntos críticos del campo escalar  $f(x, y) = (ax^2 + by^2)e^{-(x^2+y^2)}$  donde  $a > 0$  y  $b > 0$ .
36. Trazar un plano que pase por el punto  $(1, 2, 3)$  y que forme con los ejes coordenados un tetraedro de volumen mínimo (el volumen del tetraedro es un tercio del área de la base por la altura).
37. Calcula un punto  $(u, v, w)$  de coordenadas positivas de la esfera unidad  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  tal que el plano tangente a la esfera en dicho punto determine con los ejes coordenados un tetraedro de volumen mínimo.

### 1.5.2. Derivadas parciales de funciones compuestas

En lo que sigue se supone que todas las funciones son de clase  $C^1$ . Consideremos un campo escalar de dos variables  $z = f(x, y)$ . Supongamos que expresamos las variables  $x$  e  $y$  en función de otras nuevas variables  $u$  y  $v$  en la forma  $x = x(u, v)$ ,  $y = y(u, v)$ . Expresando el campo escalar  $f$  mediante las nuevas variables obtenemos el campo escalar  $h(u, v) = f(x(u, v), y(u, v))$ . Vamos a calcular la derivada  $D_1 h(a, b)$ . Para ello tenemos que derivar la función  $h_1(u) = h(u, b)$  en el punto  $u = a$ . Observa que  $h_1(u) = f(x(u, b), y(u, b))$ . La función  $\gamma_1(u) = (x(u, b), y(u, b))$  es una curva en  $\mathbb{R}^2$  y tenemos que  $h_1(u) = f(\gamma_1(u))$ . Por tanto, para calcular la derivada de  $h_1$  en  $u = a$  podemos aplicar la fórmula 1.10 y, teniendo en cuenta que  $\gamma_1'(a) = (D_1 x(a, b), D_1 y(a, b))$ , resulta:

$$D_1 h(a, b) = h_1'(a) = \langle \nabla f(\gamma_1(a)) | \gamma_1'(a) \rangle = D_1 f(\gamma_1(a)) D_1 x(a, b) + D_2 f(\gamma_1(a)) D_1 y(a, b)$$

Esta igualdad suele escribirse en la forma:

$$\frac{\partial h}{\partial u}(a, b) = \frac{\partial f}{\partial x}(x(a, b), y(a, b)) \frac{\partial x}{\partial u}(a, b) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(a, b), y(a, b)) \frac{\partial y}{\partial u}(a, b)$$

En esta igualdad la letra  $x$  a la derecha tiene dos significados distintos: en  $\frac{\partial f}{\partial x}$  indica derivación respecto a la variable  $x$  en  $f$ , y en  $\frac{\partial x}{\partial u}$  la letra  $x$  representa la función  $x = x(u, v)$ . Observa que las derivadas parciales de  $f$  están evaluadas en el punto  $(x(a, b), y(a, b))$  y las derivadas parciales de  $x = x(u, v)$  e  $y = y(u, v)$  están evaluadas en  $(a, b)$ . La igualdad anterior suele escribirse sin indicar los puntos en los que se evalúan las derivadas parciales con lo que queda como sigue:

$$\frac{\partial h}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u}$$

Todavía se suele hacer una simplificación adicional, y peligrosa, que consiste en identificar las funciones  $h$  (que es la función compuesta) y  $f$ , porque “son la misma función expresada en distintas variables”. Con ello resulta:

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u}$$

Si te fijas bien en esta igualdad, está claro que a la izquierda la letra  $f$  representa la función compuesta porque se está derivando respecto de una variable  $u$  a través de las derivadas respecto a las variables  $x$  e  $y$ . Un último paso consiste en representar la función  $f$  por una letra distinta  $z = f(x, y)$ :

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u}$$

Escrita así es fácil de memorizar pero debes entender bien los distintos significados de los símbolos que aparecen en esa igualdad y la forma en que se evalúan las derivadas parciales.

De forma análoga se obtiene que:

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v}$$

Consideremos ahora el caso de una función de una variable  $y = f(x)$  y vamos a expresar la variable  $x$  como función de otras nuevas variables  $x = x(u, v)$ . Expresando la función  $f$  mediante las nuevas variables obtenemos el campo escalar  $h(u, v) = f(x(u, v))$ . Vamos a calcular la derivada  $D_1 h(a, b)$ . Para ello tenemos que derivar la función  $h_1(u) = h(u, b)$  en el punto  $u = a$ . Observa que  $h_1(u) = f(x(u, b))$ . Pongamos  $\gamma_1(u) = x(u, b)$ , que es una función de una variable, y tenemos que  $h_1(u) = f(\gamma_1(u))$ . Por tanto, para calcular la derivada de  $h_1$  en  $u = a$  podemos aplicar la regla de la cadena para funciones de una variable y, teniendo en cuenta que  $\gamma_1'(a) = D_1 x(a, b)$ , resulta:

$$D_1 h(a, b) = h_1'(a) = f'(\gamma_1(a)) D_1 x(a, b) = f'(x(a, b)) D_1 x(a, b) = f'(x(a, b)) \frac{\partial x}{\partial u}(a, b)$$

Análogamente se obtiene:

$$D_2 h(a, b) = h_1'(a) = f'(\gamma_1(a)) D_2 x(a, b) = f'(x(a, b)) D_2 x(a, b) = f'(x(a, b)) \frac{\partial x}{\partial v}(a, b)$$

**1.36 Ejemplo.** Vamos a calcular  $\frac{\partial z}{\partial u}$  siendo  $z = x^2 + y^5 + 3xy$  donde  $x = u^2 + v^2$ ,  $y = \sin(uv)$ .

Así es como suelen enunciarse estos ejercicios y debes entender bien el enunciado. Nos están dando una función de las variables  $(x, y)$  a la que llaman  $z$ . Esto es la letra  $z$  representa una función, a saber,  $z = x^2 + y^5 + 3xy$ . Nos están dando un *cambio de variables* por medio de las igualdades  $x = u^2 + v^2$ ,  $y = \sin(uv)$ . Y nos piden calcular  $\frac{\partial z}{\partial u}$ . Esto último ya nos dice claramente que debemos ver  $z$  como función de  $u$  y  $v$ , es decir, la letra  $z$  en  $\frac{\partial z}{\partial u}$  es la función que nos dan *después de sustituir en ella las nuevas variables*, o sea, la función compuesta de  $z = x^2 + y^5 + 3xy$  con  $G(u, v) = (u^2 + v^2, \sin(uv))$ .

Sabemos que

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} = (2x + 3y)2u + (5y^4 + 3x)y \cos(uv)$$

Si lo dejamos así escrito parece que  $\frac{\partial z}{\partial u}$  depende de 4 variables. Pero no es así porque en la igualdad anterior las variables son  $u$  y  $v$  (las nuevas variables) mientras que  $x$  e  $y$  (las antiguas variables) vienen dadas por  $x = u^2 + v^2$ ,  $y = \sin(uv)$ . Por tanto, es mejor hacer la sustitución, con lo que resulta

$$\frac{\partial z}{\partial u} = (2(u^2 + v^2) + 3 \sin(uv))2u + (5 \sin^4(uv) + 3u^2 + v^2)y \cos(uv)$$

que nos da el valor de la derivada parcial de la función compuesta en un punto  $(u, v)$ . En este caso es muy sencillo calcular de forma explícita la función compuesta. Hazlo y comprueba el resultado obtenido. ♦

### 1.5.3. Ejercicios propuestos

- 38.** Sea  $z = \cos(xy) + e^{y-1} \cos x$  donde  $x = u^2 + v$ ,  $y = u - v^2$ . Calcular  $\frac{\partial z}{\partial u}$  en el punto  $(u, v) = (1, 1)$ .
- 39.** Sea  $u = (x + y)^4 + y^2(z + x)^3$  donde  $x = rse^{-t}$ ,  $y = rs \log(1 + t^2)$ ,  $z = r^2 s \cos t$ . Calcula  $\frac{\partial u}{\partial s}$  cuando  $r = 2$ ,  $s = 1$ ,  $t = 0$ .
- 40.** Sea  $z = f(x, y)$ , y pongamos  $x = u^2 + v^2$ ,  $y = u/v$ . Calcular las derivadas parciales de  $z$  respecto de las nuevas variables  $u$  y  $v$  en función de las derivadas parciales de  $z$  respecto de  $x$  e  $y$ .

41. Sea  $u = x^4y + y^2z^3 + \phi(x/y)$ , donde

$$\begin{cases} x = 1 + rse^t \\ y = rs^2e^{-t} \\ z = r^2s \operatorname{sen} t \end{cases}$$

Calcular  $\frac{\partial u}{\partial s}$  cuando  $r = 2, s = 1, t = 0$ , sabiendo que  $\phi'(3/2) = -1$ .

42. Sea  $z = f(x, y)$  donde  $x = s^4 + r^4, y = 2rs^2$ . Calcula  $\frac{\partial z}{\partial x}(2, 2)$  y  $\frac{\partial z}{\partial y}(2, 2)$ . Siendo  $\frac{\partial z}{\partial r}(1, 1) = -2$  y  $\frac{\partial z}{\partial s}(1, 1) = 3$ .

43. Prueba que la función  $F(x, y) = f(\frac{y}{x^2 - y^2})$ , donde  $f$  es una función real derivable, verifica la igualdad

$$(x^2 + y^2) \frac{\partial F}{\partial x} + 2xy \frac{\partial F}{\partial y} = 0$$

44. Prueba que la función  $F(u, v) = f(uv, (u^2 - v^2)/2)$ , donde  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  es una función diferenciable, verifica la igualdad

$$(u^2 + v^2) \left[ \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 \right] = \left( \frac{\partial F}{\partial u} \right)^2 + \left( \frac{\partial F}{\partial v} \right)^2$$

45. Sea  $z = f(x, y)$ , donde  $x = \rho \cos \vartheta, y = \rho \operatorname{sen} \vartheta$ . Calcula  $\partial z / \partial \rho$  y  $\partial z / \partial \vartheta$  y prueba que

$$\left( \frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial y} \right)^2 = \left( \frac{\partial z}{\partial \rho} \right)^2 + \frac{1}{\rho^2} \left( \frac{\partial z}{\partial \vartheta} \right)^2$$

46. Sea  $g(s, t) = f(s^2 - t^2, t^2 - s^2)$ . Prueba la igualdad  $t \frac{\partial g}{\partial s} + s \frac{\partial g}{\partial t} = 0$ .

47. Sean  $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  derivables. Se define la función de dos variables  $z(xy) = x^2yf(xy) + xy^2g(y/x)$ . Probar que:

$$x \frac{\partial z}{\partial x}(x, y) + y \frac{\partial z}{\partial y}(x, y) = 3z(x, y)$$

48. Sean  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  y  $h: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  funciones derivables. Definamos la función:

$$f(x, y) = x^2g\left(\frac{x}{y}\right) + xyh\left(\frac{x}{x+y}, \frac{x^2}{y^2}\right)$$

Prueba que  $x \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2f(x, y)$ .



**49.** Un campo escalar de dos variables  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  se llama homogénea de grado  $n \in \mathbb{N}$  si  $f(tx, ty) = t^n f(x, y)$ . Prueba que en tal caso se verifica la igualdad

$$x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = n f(x, y)$$

## 1.6. Funciones vectoriales. Matriz jacobiana

Una función vectorial es cualquier función que toma valores en un espacio vectorial de dimensión mayor que 1. Las curvas en el plano o en el espacio son funciones vectoriales de una variable. Ahora nos interesa considerar funciones vectoriales de varias variables.

**1.37 Definición.** Sean  $f_1, f_2, \dots, f_m$  campos escalares definidos en un subconjunto  $E \subset \mathbb{R}^n$ . La función  $\mathbf{F} : E \rightarrow \mathbb{R}^m$  definida para todo  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in E$  por

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), \dots, f_m(\mathbf{x}))$$

es una *función vectorial* de  $n$  variables y  $m$  componentes. Suele escribirse  $\mathbf{F} = (f_1, f_2, \dots, f_m)$ . El nombre de *campo vectorial* se aplica a aquellas funciones vectoriales que tienen igual número de variables que de componentes, esto es, para funciones definidas en un subconjunto de un espacio vectorial y que toman valores en dicho espacio vectorial.

**1.38 Definición.** Sea  $\mathbf{F} = (f_1, f_2, \dots, f_m) : E \rightarrow \mathbb{R}^m$ , donde  $E \subset \mathbb{R}^n$ , una función vectorial de  $n$  variables y  $m$  componentes. Sea  $\mathbf{a}$  un punto interior de  $E$ . Se dice que  $\mathbf{F}$  es **diferenciable** en  $\mathbf{a}$  si los campos escalares  $f_1, f_2, \dots, f_m$  componentes de  $\mathbf{F}$  son diferenciables en  $\mathbf{a}$ . En tal caso, la matriz cuyas filas son los vectores gradiente  $\nabla f_i(\mathbf{a})$ , esto es la matriz de  $m$  filas y  $n$  columnas  $(D_j f_i(\mathbf{a}))_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$ , se llama **matriz jacobiana** de  $f$  en  $\mathbf{a}$  y se representará por  $J(f, \mathbf{a})$ .

La aplicación lineal  $D\mathbf{F}(\mathbf{a}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  definida para todo  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  por

$$D\mathbf{F}(\mathbf{a})(\mathbf{x}) = J(f, \mathbf{a}) \cdot \mathbf{x}^t$$

donde “ $\cdot$ ” indica producto matricial y  $\mathbf{x}^t$  es el vector columna  $\mathbf{x}$ , se llama **diferencial** o **derivada** de  $\mathbf{F}$  en  $\mathbf{a}$ .

En términos del producto escalar, podemos escribir para todo  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ :

$$D\mathbf{F}(\mathbf{a})(\mathbf{x}) = (\langle \nabla f_1(\mathbf{a}) | \mathbf{x} \rangle, \langle \nabla f_2(\mathbf{a}) | \mathbf{x} \rangle, \dots, \langle \nabla f_m(\mathbf{a}) | \mathbf{x} \rangle) \in \mathbb{R}^m$$

Es fácil deducir a partir de esta igualdad y de la definición de campo escalar diferenciable que se verifica

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} \frac{\mathbf{F}(\mathbf{x}) - \mathbf{F}(\mathbf{a}) - D\mathbf{F}(\mathbf{a})(\mathbf{x} - \mathbf{a})}{\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|} = \mathbf{0}$$

**1.39 Teorema (Regla de la cadena).** Sean  $\mathbf{F} : E \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $E \subset \mathbb{R}^n$ , y  $\mathbf{G} : A \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $A \subset \mathbb{R}^q$ , funciones vectoriales tales que  $\mathbf{G}(A) \subset E$  de manera que la composición  $\mathbf{H} = \mathbf{F} \circ \mathbf{G} : A \rightarrow \mathbb{R}^m$  está definida. Supongamos que  $\mathbf{G}$  es diferenciable en un punto  $\mathbf{a} \in A$  y que  $\mathbf{F}$  es diferenciable en el punto  $\mathbf{G}(\mathbf{a}) \in E$ . Entonces se verifica que la función compuesta  $\mathbf{H}$  es diferenciable en  $\mathbf{a}$ , y su diferencial viene dada como la composición de las respectivas diferenciales:

$$D\mathbf{H}(\mathbf{a}) = D\mathbf{F}(\mathbf{G}(\mathbf{a})) \circ D\mathbf{G}(\mathbf{a}) \quad (1.16)$$

## 1.7. Extremos condicionados

En la teoría de extremos relativos se supone que las variables pueden tomar valores en cualquier punto de un conjunto abierto, es decir, pueden “*moverse libremente*” en dicho conjunto. En muchos, por no decir que en la mayoría, de los problemas reales las variables no tienen tanta libertad y están obligadas a satisfacer ciertas condiciones que en Física suelen llamarse “*ligaduras*”. Por ejemplo, supongamos que un móvil se mueve en una curva  $\Gamma$  dada por la intersección de dos superficies; para cada punto  $(x, y, z) \in \Gamma$  la energía cinética del móvil viene dada por una función conocida  $f(x, y, z)$  y queremos calcular los puntos de la trayectoria donde dicha energía es máxima o mínima. En esta situación las variables  $x, y, z$  no son libres sino que deben satisfacer la condición  $(x, y, z) \in \Gamma$ . Otro ejemplo; supongamos que la temperatura en un punto  $(x, y, z)$  de la superficie terrestre viene dada por una función  $T(x, y, z)$  y queremos calcular los puntos de mayor y menor temperatura. Aquí las variables tampoco son libres pues deben verificar una condición de la forma  $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$  donde  $R$  es el radio de la Tierra. Igualmente, en problemas de optimización de costes o beneficios las variables están siempre sometidas a restricciones que dependen de las condiciones de producción o del mercado.

Es importante que comprendas la diferencia entre un problema de extremos relativos “libres” y un problema de extremos condicionados. Considera el siguiente ejemplo.

**1.40 Ejemplo.** La función  $f(x, y) = xye^{x^2+y^2}$  tiene un único punto crítico, el origen, que es un punto de silla. Por tanto dicha función no tiene extremos relativos en  $\mathbb{R}^2$ .

Supongamos que imponemos a las variables la condición  $x^2 + y^2 = 1$  y queremos calcular el máximo valor de  $f(x, y)$  cuando se verifique que  $x^2 + y^2 = 1$ . Fíjate en que el problema es completamente distinto. Ahora solamente nos interesan los valores que toma la función  $f(x, y)$  en el conjunto

$$K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$$

Sabemos que dicho conjunto es un conjunto compacto (es cerrado – porque coincide con su frontera – y acotado); además la función  $f$  es continua, por tanto podemos asegurar, de entrada, que tiene que haber algún punto  $(a, b) \in K$  en el cual la función  $f$  alcanza su mayor valor en  $K$  (y tiene que haber otro donde alcance su menor valor en  $K$ ). Calcular dicho punto es, en este caso, muy sencillo pues para  $(x, y) \in K$  se tiene que  $f(x, y) = e xy$ . Como para  $(x, y) \in K$  se tiene que  $y = \pm \sqrt{1 - x^2}$  y los valores negativos de  $f$  no nos interesan porque queremos calcular el mayor valor que toma en  $K$ , se sigue que

$$\max \{f(x, y) : (x, y) \in K\} = \max \left\{ e x \sqrt{1 - x^2} : -1 \leq x \leq 1 \right\}$$

Nuestro problema se ha convertido en calcular el máximo absoluto de la función  $h(x) = e x \sqrt{1 - x^2}$  para  $-1 \leq x \leq 1$ . ♦

De hecho, tú has resuelto ejercicios de extremos condicionados aunque no seas consciente de ello. Por ejemplo, seguro que alguna vez has resuelto el siguiente ejercicio.

**1.41 Ejemplo.** Entre todos los rectángulos cuyo perímetro es igual a 16 calcular el que tiene área máxima.

Este ejercicio puedes plantearlo como sigue. Sea  $f(x, y) = xy$  la función que da el área de un rectángulo cuyos lados tienen longitudes  $x$  e  $y$ . Se trata de calcular el máximo de  $f(x, y)$  cuando las variables verifican la condición  $2x + 2y = 16$ . Por tanto, es un problema de extremos condicionados. Seguro que ahora recuerdas algunos otros ejercicios parecidos a este que has hecho sin saber que estabas haciendo problemas de extremos condicionados. La razón es clara: la condición que nos dan es tan sencilla que permite despejar una variable en función de la otra,  $y = 8 - x$ , con lo que nuestra función se convierte en  $xy = x(8 - x)$  y el problema queda reducido a calcular el mayor valor de  $x(8 - x)$  cuando  $-8 \leq x \leq 8$ . ♦

Los ejemplos anteriores ponen de manifiesto que *los problemas de extremos condicionados en los que puede utilizarse la condición que nos dan para despejar una variable en función de otra, se reducen fácilmente a problemas de extremos de*

*funciones de una variable*. Pero supongamos ahora que cambiamos la condición del ejemplo 1 por la siguiente:

$$x - e^x + y + e^y + \sin(1 + xy) = 2$$

La cosa se complica porque ahora es imposible usar la condición impuesta para despejar una variable en función de la otra. Ahora sí tenemos un auténtico problema de extremos condicionados.

Lo antes dicho para funciones de dos variables puedes generalizarlo para funciones de tres variables. Por ejemplo el problema de calcular las dimensiones de un ortoedro de volumen igual a 8 para que su superficie lateral sea mínima, puedes plantearlo como sigue: calcular el mínimo de

$$f(x, y, z) = 2xy + 2xz + 2yz$$

(la función que da la superficie lateral de un ortoedro cuyos lados tiene longitudes  $x, y, z$ ) con la condición  $xyz = 8$ . Se trata de un problema de extremos condicionados, pero la condición dada permite despejar una variable en función de las otras dos,  $z = 8/(xy)$ , con lo que nuestra función queda  $2xy + 2xz + 2yz = xy + 16/y + 16/x$ , función de la que hay que calcular su mínimo absoluto cuando  $0 < x, 0 < y$ . Hemos convertido así el problema en uno de extremos relativos de una función de dos variables. Pero si cambiamos la condición anterior por la siguiente

$$x^2yz^3 + \sin(1 + xz) + y - e^{yx} = 1$$

o bien, si imponemos dos condiciones como las siguientes:

$$\log(1 + x^2 + y^2) + \sin(1 + xz) - 1 = 0, \quad e^{1+y+x+z} + \cos(xyz) + x^2z^2 - 3 = 0$$

entonces no podemos usar esa condición (o condiciones) para despejar una variable (o dos variables) en función de las otras (de la otra).

### 1.7.1. Teorema de los multiplicadores de Lagrange

La teoría de extremos condicionados te dice cómo proceder en este tipo de problemas independientemente de que la condición (o condiciones) que nos den sea más o menos fácil y permita o no despejar variables. El resultado básico de esa teoría, que proporciona una **condición necesaria** de extremo condicionado, es el teorema de Lagrange. Para facilitar su comprensión, en vez de dar un enunciado general, lo enuncio en los tres casos que se presentan con mayor frecuencia. Antes de enunciarlo conviene dar la definición de extremo local condicionado.

**1.42 Definición.** Sea  $f$  un campo escalar de  $n$  variables y  $S$  un subconjunto de  $\mathbb{R}^n$ . Se dice que  $f$  tiene un máximo (resp. mínimo) local condicionado (por la condición  $x \in S$ ) en un punto  $a \in S$ , si hay un número  $r > 0$  tal que para todo  $x \in B(x, r) \cap S$  se verifica que  $f(a) \geq f(x)$  (resp.  $f(a) \leq f(x)$ ). Cuando  $f$  tiene en  $a$  un máximo o un mínimo local condicionado (por la condición  $x \in S$ ) se dice que  $f$  tiene un extremo condicionado en  $a$ .

En lo que sigue supondremos que las funciones que intervienen tienen derivadas parciales de primer orden continuas.

**a)** Consideremos el problema de calcular los extremos locales una función de dos variables  $f(x, y)$  cuando las variables están obligadas a moverse en una curva  $\Gamma$  dada por  $g(x, y) = 0$ :

$$\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : g(x, y) = 0\}$$

Es decir, se trata de un problema de extremos condicionados por la condición  $(x, y) \in \Gamma$  o, equivalentemente,  $g(x, y) = 0$ .

Además de las condiciones de derivabilidad que se han supuesto al principio, hay que suponer que el vector gradiente de  $g$  no se anula en los puntos de  $\Gamma$ . En estas hipótesis, para que un punto  $(a, b) \in \Gamma$  sea un extremo local condicionado de  $f$ , es necesario que los vectores gradiente de  $f$  y de  $g$  en el punto  $(a, b)$  sean linealmente dependientes; es decir, que exista un número real  $\lambda_0$  tal que

$$\nabla f(a, b) + \lambda_0 \nabla g(a, b) = 0 \iff \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) + \lambda_0 \frac{\partial g}{\partial x}(a, b) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) + \lambda_0 \frac{\partial g}{\partial y}(a, b) = 0 \end{cases}$$

Como debe cumplirse también que  $g(a, b) = 0$ , para recordar estas tres condiciones que debe cumplir el punto  $(a, b)$  se suele definir una nueva función de tres variables, llamada función de Lagrange, por

$$F(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y)$$

y las condiciones anteriores nos dicen que el punto  $(a, b, \lambda_0)$  es un punto crítico de la función de Lagrange, es decir, es solución del sistema de ecuaciones (llamado sistema de Lagrange):

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x}(x, y, \lambda) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + \lambda \frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y}(x, y, \lambda) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) + \lambda \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial \lambda}(x, y, \lambda) = g(x, y) = 0 \end{cases}$$

**b)** Consideremos el problema de calcular los extremos locales una función de tres variables  $f(x, y, z)$  cuando las variables están obligadas a moverse en una superficie  $S$  dada por  $g(x, y, z) = 0$ :

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : g(x, y, z) = 0\}$$

Es decir, se trata de un problema de extremos condicionados por la condición  $(x, y, z) \in S$  o, equivalentemente,  $g(x, y, z) = 0$ .

Además de las condiciones de derivabilidad que se han supuesto al principio, hay que suponer que el vector gradiente de  $g$  no se anula en los puntos de  $S$ . En estas hipótesis, para que un punto  $(a, b, c) \in S$  sea un extremo local condicionado de  $f$ , es necesario que los vectores gradiente de  $f$  y de  $g$  en el punto  $(a, b, c)$  sean linealmente dependientes; es decir, que exista un número real  $\lambda_0$  tal que

$$\nabla f(a, b, c) + \lambda_0 \nabla g(a, b, c) = 0 \iff \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(a, b, c) + \lambda_0 \frac{\partial g}{\partial x}(a, b, c) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(a, b, c) + \lambda_0 \frac{\partial g}{\partial y}(a, b, c) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial z}(a, b, c) + \lambda_0 \frac{\partial g}{\partial z}(a, b, c) = 0 \end{cases}$$

Como debe cumplirse también que  $g(a, b, c) = 0$ , para recordar estas cuatro condiciones que debe cumplir el punto  $(a, b, c)$  se suele definir una nueva función de cuatro variables, llamada función de Lagrange, por

$$F(x, y, z, \lambda) = f(x, y, z) + \lambda g(x, y, z)$$

y las condiciones anteriores nos dicen que el punto  $(a, b, c, \lambda_0)$  es un punto crítico de la función de Lagrange, es decir, es solución del sistema de ecuaciones (llamado sistema de Lagrange):

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x}(x, y, z, \lambda) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) + \lambda \frac{\partial g}{\partial x}(x, y, z) = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y}(x, y, z, \lambda) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) + \lambda \frac{\partial g}{\partial y}(x, y, z) = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial z}(x, y, z, \lambda) = \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) + \lambda \frac{\partial g}{\partial z}(x, y, z) = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial \lambda}(x, y, z, \lambda) = g(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

**c)** Consideremos el problema de calcular los extremos locales una función de tres variables  $f(x, y, z)$  cuando las variables están obligadas a moverse en una curva  $\Gamma$  dada por  $g(x, y, z) = h(x, y, z) = 0$ :

$$\Gamma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : g(x, y, z) = h(x, y, z) = 0\}$$

Es decir, se trata de un problema de extremos condicionados por la condición  $(x, y, z) \in \Gamma$  o, equivalentemente,  $g(x, y, z) = h(x, y, z) = 0$ .

Además de las condiciones de derivabilidad que se han supuesto al principio, hay que suponer que los vectores gradiente de  $g$  y de  $h$  son linealmente independientes en todo punto de  $\Gamma$ . En estas hipótesis, para que un punto  $(a, b, c) \in \Gamma$  sea un extremo local condicionado de  $f$ , es necesario que los vectores gradiente de  $f$ ,  $g$  y  $h$  en el punto  $(a, b, c)$  sean linealmente dependientes; es decir, que existan números reales  $\lambda_0, \mu_0$  tales que

$$\nabla f(a, b, c) + \lambda_0 \nabla g(a, b, c) + \mu_0 \nabla h(a, b, c) = 0$$

O, lo que es igual:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(a, b, c) + \lambda_0 \frac{\partial g}{\partial x}(a, b, c) + \mu_0 \frac{\partial h}{\partial x}(a, b, c) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(a, b, c) + \lambda_0 \frac{\partial g}{\partial y}(a, b, c) + \mu_0 \frac{\partial h}{\partial y}(a, b, c) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial z}(a, b, c) + \lambda_0 \frac{\partial g}{\partial z}(a, b, c) + \mu_0 \frac{\partial h}{\partial z}(a, b, c) = 0 \end{cases}$$

Como debe cumplirse también que  $g(a, b, c) = h(a, b, c) = 0$ , para recordar estas cinco condiciones que debe cumplir el punto  $(a, b, c)$  se suele definir una nueva función de cinco variables, llamada función de Lagrange, por

$$F(x, y, z, \lambda, \mu) = f(x, y, z) + \lambda g(x, y, z) + \mu h(x, y, z)$$

Las condiciones anteriores nos dicen que  $(a, b, c, \lambda_0, \mu_0)$  es un punto crítico de la función de Lagrange, es decir, es solución del sistema de ecuaciones (llamado sistema de Lagrange):

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x}(x, y, z, \lambda, \mu) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) + \lambda \frac{\partial g}{\partial x}(x, y, z) + \mu \frac{\partial h}{\partial x}(x, y, z) = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y}(x, y, z, \lambda, \mu) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) + \lambda \frac{\partial g}{\partial y}(x, y, z) + \mu \frac{\partial h}{\partial y}(x, y, z) = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial z}(x, y, z, \lambda, \mu) = \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) + \lambda \frac{\partial g}{\partial z}(x, y, z) + \mu \frac{\partial h}{\partial z}(x, y, z) = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial \lambda}(x, y, z, \lambda, \mu) = g(x, y, z) = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial \mu}(x, y, z, \lambda, \mu) = h(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

Esta es la teoría que debes saber referente a extremos condicionados. El método que hemos descrito se conoce como **método de los multiplicadores de Lagrange** porque las variables  $\lambda, \mu$  que se introducen se llaman multiplicadores de Lagrange.

La situación que consideraremos en los ejercicios será la siguiente: deberás calcular el máximo o el mínimo absolutos de los valores de una función cuando las variables están sometidas a una condición como las que hemos considerado anteriormente (las variables deben estar en una curva  $\Gamma$  en el plano, o en una superficie  $S$  en el espacio, o en una curva  $\Gamma$  dada como intersección de dos superficies) donde, **además la curva  $\Gamma$  o la superficie  $S$ , según sea el caso, son conjuntos compactos** (lo que deberás justificar en cada caso). En esta situación, el teorema de Weierstrass asegura que hay puntos de  $\Gamma$  o  $S$  en los que la función alcanza un máximo y un mínimo absolutos, es decir, son puntos en los que la función toma el mayor valor o el menor valor de todos los valores que toma en  $\Gamma$  o  $S$ . Para calcular dichos puntos lo único que debes hacer es calcular los puntos críticos de la función de Lagrange y calcular el valor de la función en cada uno de ellos, aquél punto (o puntos, puede haber más de uno) donde la función tome el mayor valor será el punto donde se alcanza el máximo absoluto; aquél punto (o puntos, puede haber más de uno) donde la función tome el menor valor será donde se alcanza el mínimo absoluto.

### 1.7.2. Ejercicios propuestos

---

**50.** Calcular el valor mayor y el valor menor que toma la función  $f(x, y, z) = xyz$  en los puntos del elipsoide  $x^2 + 4y^2 + 9z^2 = 3$ .

**51.** Calcular el valor mayor y el valor menor que toma la función

$$f(x, y, z) = y^2 + 4z^2 - 4yz - 2xz - 2xy$$

en los puntos del elipsoide  $2x^2 + 3y^2 + 6z^2 = 1$ .

**52.** Determinar los puntos sobre la curva  $x^2y = 2$  más próximos al origen.

**53.** Hallar el punto de la recta intersección de los planos  $x - y = 2$  y  $x - 2z = 4$ , que está más próximo al origen.

**54.** Calcular el punto  $P(x, y, z)$  en el plano de ecuación  $2x + y - z = 5$  que está más cerca del origen.

**55.** El plano  $x + y + z = 24$  corta al paraboloide  $z = x^2 + y^2$  en una elipse. Calcula los puntos más altos y más bajos de dicha elipse.



56. Utiliza el método de los multiplicadores de Lagrange para calcular un punto de la elipse de ecuación

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

tal que el segmento determinado por la intersección de la tangente a la elipse en dicho punto con los ejes coordenados tenga longitud mínima.

56. Dado el elipsoide

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

calcular un punto de coordenadas positivas tal que el plano tangente al elipsoide en dicho punto determine con los ejes coordenados un tetraedro de volumen mínimo.

57. Hallar los puntos de la curva

$$\begin{cases} x^2 - xy + y^2 - z^2 = 1 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

que están más próximos al origen de coordenadas.

58. Calcular la mínima distancia del origen a la superficie de ecuación  $xy^2z^3 = 2$ .
59. Calcular los valores máximo y mínimo de la función  $f(x, y, z) = xyz$  cuando el punto  $(x, y, z)$  pertenece a la curva definida por la intersección del plano  $x + y + z = 0$  y la esfera  $x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$ .
60. Calcular la mínima distancia entre la recta  $x + y = 4$  y la circunferencia  $x^2 + y^2 = 1$ .
61. Calcular la mínima distancia entre la recta  $x - y = 2$  y la parábola  $y = x^2$ .
61. Calcula la distancia mínima entre la elipse  $x^2 + 2y^2 = 6$  y la recta  $x + y = 5$ .
62. El área de una caja rectangular sin tapa es de  $108\text{cm}^2$ . Calcular sus dimensiones para que el volumen sea máximo.

### 1.7.3. Cálculo de extremos en conjuntos compactos

En este tipo de ejercicios se trata de calcular el máximo o el mínimo absolutos de una función  $f$  con derivadas parciales continuas en un conjunto compacto  $K$  formado por la unión de un conjunto abierto acotado y de su frontera,  $K = U \cup Fr(U)$ .

En este tipo de ejercicios la existencia de dichos extremos está asegurada de antemano en virtud del teorema de Weierstrass. Se trata realmente de dos problemas, pues lo que hay que hacer es estudiar los extremos relativos de  $f$  en el abierto  $U$  (un problema de extremos relativos) y estudiar los extremos locales condicionados de  $f$  en  $Fr(U)$ . Si la frontera de  $U$  está definida de forma apropiada (es una curva o una superficie) éste último es un problema de extremos condicionados. Cuando la frontera de  $U$  está dada por condiciones sencillas que permiten despejar variables puede hacerse un estudio directo sin necesidad de recurrir a la teoría de extremos condicionados.

#### 1.7.4. Ejercicios propuestos

---

**63.** Calcular los extremos absolutos de  $f(x, y) = x^3 + y^3 - x^2 - y^2 + 1$  en el conjunto  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 2\}$ .

**64.** Se considera la función  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  dada por:

$$f(x, y) = \frac{x^3}{3} + \frac{y^3}{3} - \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} + 1$$

a) Clasifica los puntos críticos de  $f$  en el disco abierto  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 4\}$ .

b) Calcula los extremos absolutos de  $f$  en el disco cerrado  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4\}$ .

**65.** Hallar los extremos absolutos de  $f(x, y) = x^2 + 3y^2$  en el círculo  $x^2 - 2x + y^2 - 3 \leq 0$ .

**66.** a) Clasifica los puntos críticos del campo escalar:

$$f(x, y) = x^2 y^3 + x^2 + 6y^2.$$

b) Calcula sus extremos absolutos en el conjunto  $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 5\}$ .

**67.** Hallar los extremos absolutos de la función  $f(x, y) = x^2 y^3 (1 - x - y)$  en el conjunto  $K = \{(x, y) : |x| + |y| \leq 1\}$ .

**68.** Se considera  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x, y, z) = x^2 + yz$ ,  $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ .

a) Calcular y clasificar los puntos críticos de  $f$  en  $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 < 1\}$ .

b) Calcular los extremos absolutos en  $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$ .

**69.** Hallar los extremos absolutos de  $f(x, y) = x^2 + y^2 - xy - x - y$  en el conjunto

$$K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 3\}$$

70. Una placa circular plana tiene la forma del círculo  $x^2 + y^2 \leq 1$ . La placa se calienta de manera que la temperatura en un punto  $(x, y)$  de la misma viene dada por:

$$T(x, y) = x^2 + 2y^2 - x$$

Determinar los puntos con mayor y menor temperatura de la placa así como la temperatura en cada uno de ellos.

71. Calcula los valores máximo y mínimo de la función  $f(x, y, z) = xyz$  cuando el punto  $(x, y, z)$  pertenece a la curva dada por la intersección de la esfera  $x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$  y el plano  $x + y + z = 0$ .

## 1.8. Derivación de funciones implícitamente definidas

### Teorema de la función implícita

Suponemos que las funciones que consideramos en lo que sigue tienen derivadas parciales de primer orden continuas.

a) Consideremos primero el caso de una función  $f(x, y)$  de dos variables. Sea

$$\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) = 0\}$$

Supongamos que  $(a, b) \in \Gamma$  y se verifica que

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a, b) \neq 0$$

Entonces existe una función  $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$ , definida en un intervalo  $I$  tal que  $a \in I$  y  $\varphi(a) = b$ , que verifica que  $f(x, \varphi(x)) = 0$  para todo  $x \in I$ . La función  $\varphi$  se dice que está implícitamente definida por la ecuación  $f(x, y) = 0$ . Dicha función es derivable en  $I$  y su derivada se calcula derivando la igualdad  $f(x, \varphi(x)) = 0$  respecto a  $x$  con lo que se obtiene

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, \varphi(x)) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, \varphi(x))\varphi'(x) = 0 \implies \varphi'(x) = \frac{-\frac{\partial f}{\partial x}(x, \varphi(x))}{\frac{\partial f}{\partial y}(x, \varphi(x))}$$

Además tenemos que

$$\Gamma \cap (I \times \varphi(I)) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) = 0\} \cap (I \times \varphi(I)) = \{(x, \varphi(x)) : x \in I\}$$

es decir,  $\Gamma$  es **localmente** en el punto  $(a, b)$  una curva que viene dada por la gráfica de  $\varphi$ .

b) Consideremos ahora el caso de una función  $f(x, y, z)$  de tres variables. Sea

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : f(x, y, z) = 0\}$$

Supongamos que  $(a, b, c) \in S$  y se verifica que

$$\frac{\partial f}{\partial z}(a, b, c) \neq 0$$

Entonces existe una función  $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}$ , definida en un abierto  $U \subset \mathbb{R}^2$  con  $(a, b) \in U$  y  $\varphi(a, b) = c$ , que verifica que  $f(x, y, \varphi(x, y)) = 0$  para todo  $(x, y) \in U$ . La función  $\varphi$  se dice que está implícitamente definida por la ecuación  $f(x, y, z) = 0$ . Dicha función tiene derivadas parciales continuas en  $U$  y sus derivadas parciales se calculan derivando la igualdad  $f(x, y, \varphi(x, y)) = 0$  parcialmente respecto a  $x$  e  $y$  con lo que se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, \varphi(x, y)) + \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, \varphi(x, y)) \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y) &= 0 \implies \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y) = \frac{-\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, \varphi(x, y))}{\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, \varphi(x, y))} \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, \varphi(x, y)) + \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, \varphi(x, y)) \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, y) &= 0 \implies \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, y) = \frac{-\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, \varphi(x, y))}{\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, \varphi(x, y))} \end{aligned}$$

Además tenemos que

$$S \cap (U \times \varphi(U)) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : f(x, y, z) = 0\} \cap (U \times \varphi(U)) = \{(x, y, \varphi(x, y)) : (x, y) \in U\}$$

es decir,  $S$  es **localmente** en el punto  $(a, b, c)$  una superficie que viene dada por la gráfica de  $\varphi$ .

El teorema de la función implícita es mucho más general pero nos limitaremos a los casos considerados. En las hipótesis hechas pueden admitirse variaciones. La hipótesis que hay que hacer siempre es que el vector gradiente de  $f$  no sea cero en el punto considerado. En el caso a) puede suponerse igualmente que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) \neq 0$$

y la conclusión es que  $x$  puede expresarse localmente como función de  $y$ , es decir, que hay una función  $\psi : J \rightarrow \mathbb{R}$  definida en un intervalo  $J$  tal que  $b \in J$  y  $\psi(b) = a$  que verifica que  $f(\psi(y), y) = 0$  para todo  $y \in J$ . Lo que sigue ya lo puedes suponer.

Análogamente, en el caso **b)** puede suponerse, por ejemplo que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b, c) \neq 0$$

entonces es la variable  $x$  la que queda definida localmente de forma implícita como función de  $y, z$ . Tú mismo puedes completar el enunciado en este caso. Todo esto nos da más libertad para elegir la variable que queremos expresar como función de las otras, basta con que la derivada parcial respecto de dicha variable sea distinta de cero.

En la práctica el teorema de la función implícita se aplica en la forma que te explico en los siguientes ejemplos.

**1.43 Ejemplo.** Comprobar que la ecuación

$$xyz + \sin(z - 6) - 2(x + y + x^2y^2) = 0$$

define a  $z$  como función implícita de  $(x, y)$  en un entorno de  $(1, 1)$ , con  $z(1, 1) = 6$ . Comprobar que  $(1, 1)$  es un punto crítico de la función  $z = z(x, y)$ .

**Solución.** Pongamos  $f(x, y, z) = xyz + \sin(z - 6) - 2(x + y + x^2y^2)$  que tiene derivadas parciales continuas de todo orden. Tenemos que  $\frac{\partial f}{\partial z} = xy + \cos(z - 6)$ , por lo que  $\frac{\partial f}{\partial z}(1, 1, 6) = 2 \neq 0$ . Como, además,  $f(1, 1, 6) = 0$ , el teorema de la función implícita garantiza que hay una función con derivadas parciales continuas,  $(x, y) \mapsto z(x, y)$ , definida en un entorno,  $U$ , de  $(1, 1)$  tal que  $z(1, 1) = 6$ , y

$$f(x, y, z(x, y)) = 0 \text{ para todo } (x, y) \in U.$$

Derivando esta identidad tenemos que:

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} = yz - 2(1 + 2xy^2) + (xy + \cos(z - 6)) \frac{\partial z}{\partial x} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} = xz - 2(1 + 2x^2y) + (xy + \cos(z - 6)) \frac{\partial z}{\partial y} = 0 \quad (2)$$

Donde las derivadas parciales de la función implícita  $z = z(x, y)$  están calculadas en un punto  $(x, y) \in U$  y las de  $f$  están calculadas en el punto  $(x, y, z(x, y))$ . Haciendo  $x = y = 1, z = z(1, 1) = 6$ , en las igualdades anteriores, se obtiene que  $\frac{\partial z}{\partial x}(1, 1) = \frac{\partial z}{\partial y}(1, 1) = 0$ , esto es,  $(1, 1)$  es un punto crítico de  $z = z(x, y)$ . ♦

El ejemplo anterior es todavía demasiado explícito, nos dice muy claramente lo que hay que hacer. Lo más frecuente es que nos encontremos con ejercicios como el siguiente.

**1.44 Ejemplo.** Sabiendo que

$$y \cos(xz) + x^3 e^{zy} - z + 1 = 0 \quad (1.17)$$

Calcular  $\frac{\partial z}{\partial x}(x, y)$  y particularizar para el punto  $(x, y) = (0, 0)$ .

**Solución.** En un ejercicio como este lo más fácil es que en la igualdad (1.17) sustituyas mentalmente  $z = z(x, y)$  y la veas como

$$y \cos(xz(x, y)) + x^3 e^{z(x, y)y} - z(x, y) + 1 = 0 \quad (1.18)$$

es decir, supones que has calculado para valores de  $x$  e  $y$  dados la solución respecto a  $z$  de la igualdad (1.17). Esta solución (que de hecho no es posible expresar de forma explícita, esto es, que no puede calcularse) la representamos por  $z = z(x, y)$  y es la función implícita definida por la igualdad (1.17) (el teorema de la función implícita *que es un teorema de existencia* garantiza que dicha función existe). Ahora derivamos en la igualdad (1.18) respecto a  $x$  para obtener

$$-y \sin(xz(x, y)) \left( z(x, y) + x \frac{\partial z}{\partial x}(x, y) \right) + 3x^2 e^{z(x, y)y} + x^3 y \frac{\partial z}{\partial x}(x, y) e^{z(x, y)y} - \frac{\partial z}{\partial x}(x, y) = 0$$

de donde

$$\frac{\partial z}{\partial x}(x, y) = \frac{yz(x, y) \sin(xz(x, y)) - 3x^2 e^{z(x, y)y}}{x^3 y e^{z(x, y)y} - xy \sin(xz(x, y)) - 1}$$

Naturalmente, esta igualdad tiene sentido siempre que el denominador de la fracción sea distinto de cero. Puedes comprobar que si llamas  $f(x, y, z) = y \cos(xz) + x^3 e^{zy} - z + 1$  entonces la igualdad anterior es precisamente

$$\frac{-\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z)}{\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z)}$$

calculada en el punto  $(x, y, z(x, y))$ . Para  $(x, y) = (0, 0)$  se tiene que  $z(0, 0)$  viene dado por la ecuación que se obtiene haciendo  $x = 0$  e  $y = 0$  en la igualdad (1.17) de donde se sigue  $z(0, 0) = 1$ . Además

$$\frac{\partial f}{\partial z}(0, 0, z(0, 0)) = \frac{\partial f}{\partial z}(0, 0, 1) = -1 \neq 0$$

Por lo que

$$\frac{\partial z}{\partial x}(0, 0) = \frac{0}{-1} = 0$$

◆

## 1.8.1. Ejercicios propuestos

**72.** Calcular las derivadas parciales de primer orden de la función  $z = z(x, y)$  definida implícitamente por  $yz^4 + x^2z^3 - e^{xyz} = 0$ . Particularizar para el punto  $(x, y) = (1, 0)$ .

**73.** Calcular las derivadas parciales de primer orden de la función  $z = z(x, y)$  definida implícitamente por  $z^3 + ze^x + \cos y = 0$ .

**74.** Calcular las derivadas parciales de primer orden de la función  $z = z(x, y)$  dada implícitamente por  $3x^2y^2 + 2z^2xy - 2zx^3 + 4zy^3 - 4 = 0$ , en el punto  $(2, 1)$  siendo  $z(2, 1) = 2$ .

**75.** Supongamos que la igualdad

$$\int_{xy}^{y+z} g(t)dt + \int_{3x+y}^{z^2} h(t)dt = 0$$

donde  $g$  y  $h$  son funciones reales derivables, define a  $z$  como función implícita de  $x, y$ . Calcular las derivadas parciales de primer orden de  $z = z(x, y)$ .

**76.** Calcular la derivada de la función  $y = y(x)$  definida implícitamente por

$$x^y + 3x^2 - 2y^2 - 2y = 0$$

Particularizar para  $x = 1$  sabiendo que  $y(1) = 1$ .

**77.** Calcular la derivada de la función  $y = y(x)$  definida implícitamente por

$$y \log(x^2 + y^2) - 2xy = 0$$

Particularizar para  $x = 0$  sabiendo que  $y(0) = 1$ .

**78.** Comprobar que en las siguientes ecuaciones se verifican las condiciones del teorema de la función implícita en el punto indicado y obtener  $y'(x)$  en los cuatro primeros casos y  $\frac{\partial z}{\partial x}$  y  $\frac{\partial z}{\partial y}$  en los otros.

a)  $x^y + 3x^2 - 2y^2 - 2y = 0$ ,  $(1, 1)$ .

b)  $\sin(x) + \cos(y) + 2y = \pi$ ,  $(0, \pi/2)$ .

c)  $y \ln(x^2 + y^2) - 2xy = 0$ ,  $(0, 1)$ .

d)  $x^y + y^x - 2xy = 0$ ,  $(2, 2)$ .

e)  $z \arctg(1 - z^2) + 3x + 5z - 8y^3 = 0$ ,  $(1, 1, 1)$ .

f)  $xyz e^z \ln(z) - 3x + 3y = 0$ ,  $(1, 1, 1)$ .

- 79.** Determinar la derivada de la función  $z = f(x, y)$  definida implícitamente por la ecuación  $x \operatorname{tg}(y) - ze^z = 0$  en el punto  $(0, \pi/4, 0)$  en la dirección dada por el vector  $(2/\sqrt{5}, 1/\sqrt{5})$ .
- 80.** Probar que la ecuación  $y^3 + x^2y = 10$  define implícitamente una función  $y = f(x)$ , tal que  $f(3) = 1$  y calcula

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - 1 + \frac{x-3}{2}}{(x-3)^2}$$



## Lección 2

---

### Integrales múltiples

---

#### Introducción

Las integrales de funciones reales de una variable, llamadas también *integrales simples*, ya han sido consideradas en la Lección 8. En esta Lección vamos a estudiar la integración de funciones reales de dos o más variables. Estas integrales suelen llamarse *integrales múltiples*. Aunque, por su mayor interés práctico, nos vamos a limitar a funciones de dos y de tres variables, los resultados que expondremos se generalizan con facilidad para funciones reales de cualquier número de variables. Como ya es usual en estas notas, eludiremos los aspectos más teóricos para centrarnos en las técnicas de cálculo de integrales dobles y triples. Vamos a ver que el cálculo de dichas integrales se reduce al cálculo de dos o tres integrales simples lo que suele hacerse calculando las correspondientes primitivas. Por tanto, *si no sabes calcular primitivas no podrás calcular integrales dobles y triples*. El área de una superficie en  $\mathbb{R}^3$  o el flujo de un campo vectorial a través de la misma, vienen dados por medio de integrales dobles; la masa de un sólido en  $\mathbb{R}^3$  o la carga eléctrica que encierra el mismo vienen dados por integrales triples. Los resultados principales del Análisis Vectorial, esto es, los teoremas de Green, de Gauss y de Stokes, se formulan por medio de integrales dobles y triples. Dichos resultados son herramientas básicas en la teoría de campos electromagnéticos y en la mecánica de fluidos.

En lo que sigue, consideraremos campos escalares acotados de dos o tres variables que supondremos definidos en subconjuntos acotados de  $\mathbb{R}^2$  o  $\mathbb{R}^3$  cuya frontera consta de un número finito de curvas o superficies *suaves* (de clase  $C^1$ ). Supondremos que los campos son continuos en todos los puntos de su conjunto de definición salvo, quizás, en los puntos de un conjunto finito de curvas o superficies suaves donde puede haber discontinuidades.

## 2.1. Integrales dobles y triples

Sea  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  un campo escalar de dos variables definido en un conjunto  $A \subset \mathbb{R}^2$ . Consideremos primero el caso más sencillo en que  $A = [a, b] \times [c, d]$  es un rectángulo. Sean

$$P = \{a = x_0, x_1, x_2, \dots, x_{p-1}, x_p = b\}, \quad Q = \{c = y_0, y_1, y_2, \dots, y_{q-1}, y_q = d\}$$

particiones de los intervalos  $[a, b]$  y  $[c, d]$  respectivamente. Dichas particiones determinan una partición, que notamos  $P \times Q$ , del rectángulo  $A = [a, b] \times [c, d]$  en subrectángulos  $[x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$ , donde  $1 \leq i \leq p$ ,  $1 \leq j \leq q$ . Observa que dichos subrectángulos solamente pueden cortarse en sus fronteras y la unión de todos ellos es  $A$ . Una **suma de Riemann** de  $f$  para la partición  $P \times Q$  es un número que se obtiene eligiendo puntos  $(s_i, t_j) \in [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$  y calculando la suma

$$\sum_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq q}} f(s_i, t_j) (x_i - x_{i-1}) (y_j - y_{j-1}) \quad (2.1)$$

Se verifica que cuando la mayor de las longitudes de los intervalos de las particiones  $P$  y  $Q$  se hace arbitrariamente pequeña (o sea, tiende a 0), las sumas de Riemann de  $f$  se aproximan tanto como se quiera a un número real que es, por definición, la integral de Riemann de  $f$  en el rectángulo  $[a, b] \times [c, d]$ , que se representa por

$$\iint_{[a,b] \times [c,d]} f(x, y) \, d(x, y)$$

Consideremos ahora que  $A$  es un conjunto acotado en  $\mathbb{R}^2$  y definamos la función  $f_A: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  por

$$f_A(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & \text{si } (x, y) \in A \\ 0 & \text{si } (x, y) \notin A \end{cases}$$

Observa que la función  $f_A$  puede tener discontinuidades en las curvas frontera de  $A$ . Se verifica que si  $B$  es un rectángulo que contiene a  $A$  la integral

$$\iint_B f_A(x, y) \, d(x, y)$$

existe en el sentido que hemos definido más arriba y es independiente del rectángulo  $B$  que contiene a  $A$ . El valor de dicha integral se representa por

$$\iint_A f(x, y) \, d(x, y)$$

y se llama la **integral de Riemann** de  $f$  en  $A$ .

Las integrales que acabamos de definir para campos escalares de dos variables se llaman *integrales dobles*.

Sea ahora  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  un campo escalar de tres variables definido en un conjunto  $A \subset \mathbb{R}^3$ . Consideremos primero el caso más sencillo en que  $A = [a, b] \times [c, d] \times [u, v]$  es un ortoedro. Sean

$$P = \{a = x_0, x_1, \dots, x_p = b\}, Q = \{c = y_0, y_1, \dots, y_q = d\}, R = \{u = z_0, z_1, \dots, z_r = d\}$$

particiones de los intervalos  $[a, b]$ ,  $[c, d]$  y  $[u, v]$  respectivamente. Dichas particiones determinan una partición de  $A = [a, b] \times [c, d] \times [u, v]$  en ortoedros del tipo  $[x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j] \times [z_{k-1}, z_k]$ , donde  $1 \leq i \leq p$ ,  $1 \leq j \leq q$ ,  $1 \leq k \leq r$ . Dichos ortoedros solamente pueden cortarse en sus fronteras y la unión de todos ellos es  $A$ . Representaremos de forma simbólica dicha partición del ortoedro  $A$  por  $P \times Q \times R$ . Una **suma de Riemann** de  $f$  para la partición  $P \times Q \times R$  es un número que se obtiene eligiendo puntos  $(s_i, t_j, w_k) \in [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j] \times [z_{k-1}, z_k]$  y calculando la suma

$$\sum_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq q \\ 1 \leq k \leq r}} f(s_i, t_j, w_k) (x_i - x_{i-1}) (y_j - y_{j-1}) (z_k - z_{k-1}) \quad (2.2)$$

Se verifica que cuando la mayor de las longitudes de los intervalos de las particiones  $P, Q, R$  tiende a 0 las sumas de Riemann de  $f$  se aproximan tanto como se quiera a un número real que es, por definición, la integral de Riemann de  $f$  en el ortoedro  $[a, b] \times [c, d] \times [u, v]$ , que se representa por

$$\iiint_{[a,b] \times [c,d] \times [u,v]} f(x, y, z) \, d(x, y, z)$$

Consideremos ahora que  $A$  es un conjunto acotado en  $\mathbb{R}^3$  y definamos la función  $f_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  por

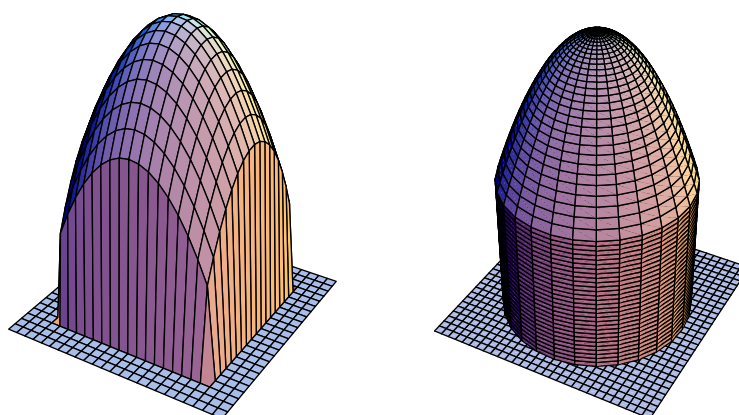
$$f_A(x, y, z) = \begin{cases} f(x, y, z) & \text{si } (x, y, z) \in A \\ 0 & \text{si } (x, y, z) \notin A \end{cases}$$

Observa que la función  $f_A$  puede tener discontinuidades en las superficies frontera de  $A$ . Se verifica que si  $B$  es un ortoedro que contiene a  $A$  la integral

$$\iiint_B f_A(x, y, z) \, d(x, y, z)$$

existe en el sentido que hemos definido más arriba y es *independiente del ortoedro  $B$  que contiene a  $A$* . El valor de dicha integral se representa por

$$\iiint_A f(x, y, z) \, d(x, y, z)$$



y se llama la **integral de Riemann** de  $f$  en  $A$ .

Las integrales que acabamos de definir para campos escalares de tres variables se llaman *integrales triples*.

Naturalmente, las definiciones que acabamos de dar no son útiles para calcular integrales. Lo que debes recordar es que podemos obtener un valor aproximado de una integral doble o triple por medio de sumas de Riemann, y cuanto más pequeñas sean las longitudes de todos los intervalos de las particiones mejor será la aproximación obtenida.

### 2.1.1. Interpretaciones de las integrales dobles y triples

Sea  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  un campo escalar de dos variables definido en un conjunto  $A \subset \mathbb{R}^2$ . Supongamos que  $f(x, y) \geq 0$  para todo  $(x, y) \in A$ . Consideremos el “cilindro” en  $\mathbb{R}^3$  que tiene como base el conjunto  $A$  y como tapadera la gráfica de  $f$ , es decir el conjunto

$$C(f, A) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in A, 0 \leq z \leq f(x, y)\}.$$

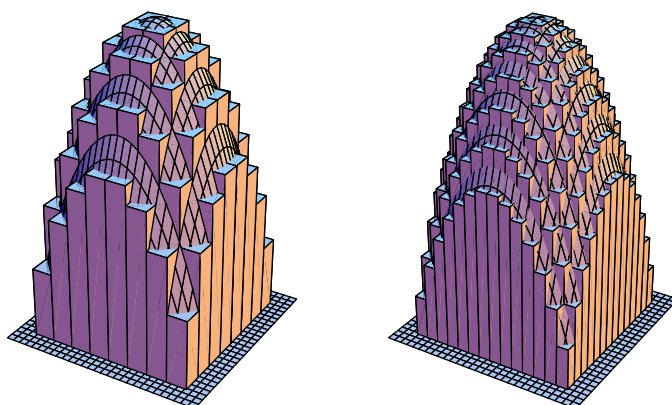
Las siguientes figuras muestran este conjunto para la función  $f(x, y) = 4 - x^2 - y^2$  y los conjuntos  $A = [-1, 1] \times [-1, 1]$  y  $A = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 2\}$ .

En esta situación, una suma de Riemann del tipo (2.1) representa una aproximación del volumen del conjunto  $C(f, A)$ . Pues lo que hacemos en (2.1) es sumar los volúmenes de pequeños ortoedros de base los rectángulos  $R_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$  y altura  $f(s_i, t_j)$ . Es claro que la suma de todos estos volúmenes es una aproximación del volumen del conjunto  $C(f, A)$ . La aproximación es tanto mejor cuanto más pequeños sean los lados de los rectángulos  $R_{ij}$  y, en el límite, el volu-

men del conjunto  $C(f, A)$  viene dado por la integral doble de  $f$  en  $A$ .

$$\iint_A f(x, y) d(x, y) = \text{volumen}(C(f, A)) \quad (2.3)$$

La siguientes figura muestra aproximaciones al volumen del primero de los dos conjuntos representados en la figura anterior.



Naturalmente, pueden darse otras muchas interpretaciones. Por ejemplo, la función  $f$  puede representar una densidad superficial de masa o de carga eléctrica en una lámina plana  $A$ . En tal caso la integral doble  $\iint_A f(x, y) d(x, y)$  proporciona, respectivamente, la masa o la carga total de la lámina  $A$ .

Las integrales dobles permiten calcular áreas planas. En efecto, basta tener en cuenta que si  $f$  es la función constante igual a 1, esto es  $f(x, y) = 1$  para todo  $(x, y) \in A$ , entonces se tiene que  $\text{volumen}(C(f, A)) = \text{área}(A)$ , pues el volumen de un cilindro de altura constante igual a 1 es numéricamente igual al área de su base.

$$\iint_A d(x, y) = \text{área}(A) \quad (2.4)$$

Las integrales triples tienen análogas interpretaciones. Si  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  es un campo escalar de tres variables definido en un conjunto  $A \subset \mathbb{R}^3$  que representa una densidad volumétrica de masa o de carga eléctrica en un sólido  $A$ , la integral triple  $\iiint_A f(x, y, z) d(x, y, z)$  proporciona, respectivamente, la masa o la carga total del sólido  $A$ .

Si integramos la función constante igual a 1 en un sólido  $A \subset \mathbb{R}^3$ , obtenemos el volumen de  $A$ .

$$\iiint_A d(x, y, z) = \text{volumen}(A) \quad (2.5)$$

## 2.2. Cálculo de integrales dobles y triples

Las definiciones que hemos dado de integral doble y triple no son útiles para el cálculo. En dichas definiciones la integral aparece como un *límite de sumas de Riemann*. De hecho, a partir de las definiciones dadas, es fácil obtener el siguiente resultado. Recuerda que en la Lección 8 definimos **el paso de una partición**  $P$ , y lo representamos por  $\delta(P)$ , como *la mayor de las longitudes de los subintervalos de dicha partición*.

**2.1 Teorema (Convergencia de las sumas integrales).** Sea  $f: [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$  un campo escalar de dos variables,  $\{P_n\}$  y  $\{Q_n\}$  sucesiones de particiones de  $[a, b]$  y  $[c, d]$  respectivamente, tales que  $\{\delta(P_n)\} \rightarrow 0$  y  $\{\delta(Q_n)\} \rightarrow 0$ . Sea  $\sigma(f, P_n \times Q_n)$  una suma de Riemann de  $f$  para la partición  $P_n \times Q_n$ . Se verifica entonces que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma(f, P_n \times Q_n) = \iint_{[a,b] \times [c,d]} f(x, y) \, d(x, y)$$

Naturalmente, un resultado análogo se tiene para integrales triples. Este resultado permite en algunos casos particulares y con bastante esfuerzo e ingenio calcular ciertas integrales. Como enseguida aprenderemos a calcular integrales múltiples con facilidad, es más interesante usar dicho resultado *sensu contrario* para calcular los límites de ciertas sucesiones.

Las dos herramientas básicas para el cálculo de integrales múltiples son los teorema de Fubini y del cambio de variables.

### 2.2.1. Integrales iteradas. Teorema de Fubini elemental

El teorema de Fubini es uno de los resultados más útiles del cálculo integral. Se trata de un resultado válido en condiciones mucho más generales que las que estamos considerando en esta Lección. La versión que vamos a ver, que es justamente la que necesitamos aquí, puede considerarse una “versión elemental” de dicho teorema. Esencialmente, el teorema de Fubini permite calcular una integral doble o triple haciendo dos o tres integrales simples. No es difícil comprender lo que dice el teorema ni tampoco lo es entender por qué se cumple. De hecho, no es la primera vez que en este curso aparece dicho teorema. El Principio de Cavalieri y el cálculo de volúmenes por secciones planas son casos particulares del teorema de Fubini. De hecho, es este último resultado el que vamos a usar ahora. Lo repito

aquí para mayor comodidad.

**2.2 Teorema** (Cálculo de volúmenes por secciones planas). *El volumen de una región en  $\mathbb{R}^3$  es igual a la integral del área de sus secciones por planos paralelos a uno dado.*

Este resultado permite calcular volúmenes calculando áreas de secciones planas y tiene importantes consecuencias para el cálculo de integrales dobles.

Consideremos una función positiva,  $f$ , definida en el rectángulo  $A = [a, b] \times [c, d]$ . Pongamos

$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in A, 0 \leq z \leq f(x, y)\}.$$

Para calcular el volumen del conjunto  $\Omega$  podemos proceder como sigue. Para cada  $x_0$  fijo calculamos el área de la sección,  $\Omega(x_0)$ , que se obtiene cortando  $\Omega$  con el plano de ecuación  $X = x_0$ . Fíjate que  $\Omega(x_0)$  es una sección de  $\Omega$  perpendicular al eje  $OX$  y, por tanto, paralela al plano  $YZ$ . Como

$$\Omega(x_0) = \{(x_0, y, z) : y \in [c, d], 0 \leq z \leq f(x_0, y)\}$$

se tiene que  $\Omega(x_0)$  es la región del plano  $X = x_0$  comprendida entre la curva  $z = f(x_0, y)$ , el eje  $OY$  y las rectas  $y = c$ ,  $y = d$ . Como sabes, el área de dicha región viene dada por  $\int_c^d f(x_0, y) dy$ . Para calcular el volumen de  $\Omega$  hay que integrar las áreas de las secciones  $\Omega(x)$  cuando  $x \in [a, b]$ , y obtenemos finalmente que

$$\iint_{[a,b] \times [c,d]} f(x, y) d(x, y) = \text{volumen}(\Omega) = \int_a^b \left[ \int_c^d f(x, y) dy \right] dx \quad (2.6)$$

Razonando de forma análoga, considerando secciones  $\Omega(y)$  de  $\Omega$  paralelas al plano  $XZ$ , se obtiene la igualdad

$$\iint_{[a,b] \times [c,d]} f(x, y) d(x, y) = \text{volumen}(\Omega) = \int_c^d \left[ \int_a^b f(x, y) dx \right] dy \quad (2.7)$$

De las igualdades (2.6) y (2.7) se deduce que

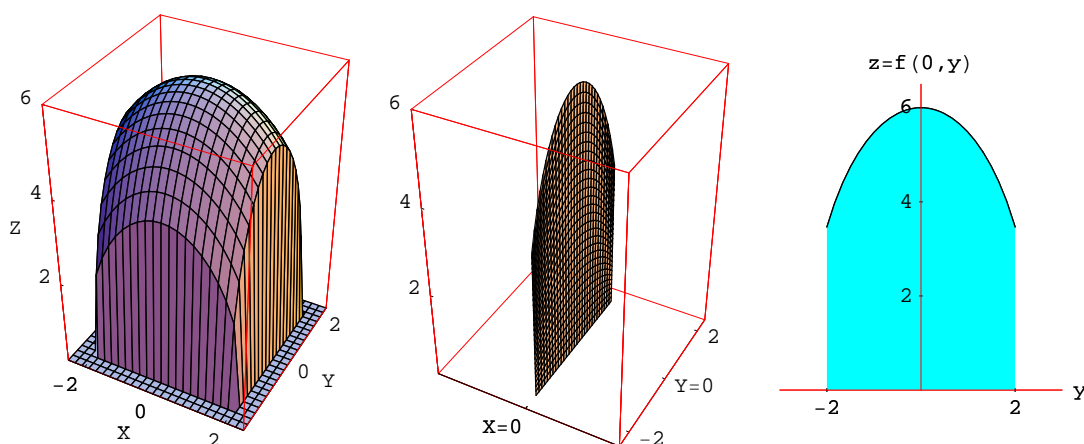
$$\iint_{[a,b] \times [c,d]} f(x, y) d(x, y) = \int_a^b \left[ \int_c^d f(x, y) dy \right] dx = \int_c^d \left[ \int_a^b f(x, y) dx \right] dy \quad (2.8)$$

Las integrales  $\int_a^b \left[ \int_c^d f(x, y) dy \right] dx$  y  $\int_c^d \left[ \int_a^b f(x, y) dx \right] dy$  se llaman *integrales iteradas* y, en las hipótesis hechas al principio de esta Lección, son iguales y su valor común es

igual a la integral doble  $\iint_{[a,b] \times [c,d]} f(x,y) d(x,y)$ . Observa que las integrales iteradas son

dos integrales simples. Para calcular  $\int_c^d \int_a^b f(x,y) dx dy$  lo que se hace es integrar respecto a la variable  $x$  considerando  $y$  fija. Para ello lo que se hace es obtener una primitiva de la función  $x \mapsto f(x,y)$  y usar la regla de Barrow. Fíjate que una primitiva de la función  $x \mapsto f(x,y)$  puede describirse como una *primitiva parcial* de  $f(x,y)$  con respecto a  $x$ . ¿Te recuerda esto a la derivación parcial?

La representación gráfica siguiente puede ayudarte a entender lo que se hace. La función representada es  $f(x,y) = \sqrt{36 - 3x^2 - 6y^2}$  en el rectángulo  $[-2,2] \times [-2,2]$ . Puedes ver el “cilindro”  $\Omega$  bajo la gráfica de la función, la sección del mismo por el plano  $X = 0$  y la proyección de dicha sección sobre el plano  $YZ$ .



Para calcular una integral  $\iint_A f(x,y) d(x,y)$  cuando el recinto de integración,  $A$ , no es un rectángulo, se procede de la misma forma. La única diferencia es que ahora tenemos que empezar por determinar los valores de  $x$  tales que el plano  $X = x$  corta al “cilindro” bajo la gráfica de  $f$ , es decir, *tenemos que determinar la proyección de  $A$  sobre el eje  $OX$* . Supongamos que dicha proyección sea un intervalo  $[a,b]$ . Ahora, para cada  $x \in [a,b]$  hay que calcular el área de la sección  $\Omega(x)$  o, lo que es igual, el área de la región en el plano  $YZ$  comprendida entre el eje  $OY$  y la curva  $z = f(x,y)$  donde la variable  $y$  está en el conjunto  $A(x) = \{y : (x,y) \in A\}$ . Supongamos que  $A(x)$  sea un intervalo (tampoco pasa nada si es unión de varios intervalos). Entonces tenemos que

$$\iint_A f(x,y) d(x,y) = \int_a^b \left[ \int_{A(x)} f(x,y) dy \right] dx \quad (2.9)$$



Análogamente se obtiene que

$$\iint_A f(x,y) d(x,y) = \int_c^d \left[ \int_{A(y)} f(x,y) dx \right] dy \quad (2.10)$$

Donde hemos supuesto que  $[c, d]$  es la *proyección de A sobre el eje OY*, y para cada  $y \in [c, d]$  es  $A(y) = \{x : (x, y) \in A\}$ .

En los casos más corrientes el conjunto  $A$  suele ser un conjunto de tipo I o de tipo II (recuerda que los vimos al estudiar las Aplicaciones de la Integral). Esto es

$$\begin{aligned} A &= \{(x, y) : a \leq x \leq b, g(x) \leq y \leq h(x)\} && \text{(tipo I)} \\ A &= \{(x, y) : c \leq y \leq d, \phi(y) \leq x \leq \psi(y)\} && \text{(tipo II)} \end{aligned}$$

En tales casos tenemos que

$$\iint_A f(x,y) d(x,y) = \int_a^b \left[ \int_{g(x)}^{h(x)} f(x,y) dy \right] dx \quad (2.11)$$

$$\iint_A f(x,y) d(x,y) = \int_c^d \left[ \int_{\phi(y)}^{\psi(y)} f(x,y) dx \right] dy \quad (2.12)$$

Observa que para el caso en que  $f(x, y) = 1$  recuperamos las fórmulas ya conocidas para el cálculo de áreas de regiones planas de tipo I y tipo II.

Aunque hemos supuesto inicialmente, para poder aplicar el teorema (2.2), que la función  $f$  es positiva, las igualdades obtenidas son válidas, en las hipótesis hechas al principio de la Lección, cualquiera sea la función que integramos.

De forma análoga a lo antes visto, el teorema de Fubini permite calcular integrales triples sin más que calcular tres integrales simples. Para el caso de una función  $f$  definida en el rectángulo de  $\mathbb{R}^3$   $A = [a, b] \times [c, d] \times [u, v]$  se tiene que

$$\iiint_{[a,b] \times [c,d] \times [u,v]} f(x,y,z) d(x,y,z) = \int_a^b \left[ \int_c^d \left[ \int_u^v f(x,y,z) dz \right] dy \right] dx$$

Observa que ahora hay seis integrales iteradas pero el valor de todas ellas es el mismo. Naturalmente, cuando  $A$  es un subconjunto de  $\mathbb{R}^3$  hay más posibilidades, pero la idea es siempre la misma: **se obtiene primero la proyección de A sobre uno de los ejes o sobre uno de los planos coordenados, y para cada punto fijado en dicha proyección se obtiene el conjunto de los puntos de A que lo proyectan.**

Si, por ejemplo, la proyección de  $A$  sobre el eje  $OZ$  es un intervalo  $J = [u, v]$ , y para cada  $z \in J$  es  $A(z) = \{(x, y) : (x, y, z) \in A\}$  (conjunto de los puntos de  $A$  que se proyectan en  $z$ ), entonces

$$\iiint_A f(x, y, z) \, d(x, y, z) = \int_u^v \left[ \iint_{A(z)} f(x, y, z) \, d(x, y) \right] dz$$

En el caso en que  $A$  sea un conjunto de tipo I en  $\mathbb{R}^3$ , es decir,  $A$  puede representarse en la forma

$$A = \{(x, y, z) : (x, y) \in \Omega, g(x, y) \leq z \leq h(x, y)\}$$

donde  $\Omega$  es la proyección de  $A$  sobre el plano  $XY$ , y  $g, h$ , son funciones reales definidas en  $\Omega$ , entonces tenemos que

$$\iiint_A f(x, y, z) \, d(x, y, z) = \iint_{\Omega} \left[ \int_{g(x, y)}^{h(x, y)} f(x, y, z) \, dz \right] d(x, y)$$

**2.3 Ejemplo.** Vamos a calcular el volumen de la mitad superior del elipsoide de ecuación

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

donde  $a > 0, b > 0, c > 0$  son las longitudes de los semiejes del elipsoide.

Se trata, pues, de calcular el volumen del conjunto  $\Omega = \left\{ (x, y, z) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1, z \geq 0 \right\}$ .

La proyección de  $\Omega$  sobre el plano  $XY$  es el conjunto  $A = \left\{ (x, y) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \right\}$ . Podemos escribir

$$\Omega = \left\{ (x, y, z) : (x, y) \in A, 0 \leq z \leq c \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} \right\}$$

La igualdad (2.3) nos dice que

$$\text{volumen}(\Omega) = \iint_A c \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} \, d(x, y)$$

Para calcular esta integral doble podemos aplicar el teorema de Fubini. Observa que  $A$  es una región de tipo I en  $\mathbb{R}^2$  pues

$$A = \left\{ (x, y) : -a \leq x \leq a, -b \sqrt{1 - x^2/a^2} \leq y \leq b \sqrt{1 - x^2/a^2} \right\}$$

Por tanto

$$\iint_A c \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} d(x, y) = \int_{-a}^a \left[ \int_{-b\sqrt{1-x^2/a^2}}^{b\sqrt{1-x^2/a^2}} c \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} dy \right] dx$$

Tenemos que

$$\int_{-b\sqrt{1-x^2/a^2}}^{b\sqrt{1-x^2/a^2}} c \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} dy = \left[ y = b \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \sin t \right] = bc \left( 1 - \frac{x^2}{a^2} \right) \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 t dt = \frac{1}{2} bc \pi \left( 1 - \frac{x^2}{a^2} \right)$$

Finalmente

$$\text{volumen}(\Omega) = \frac{1}{2} bc \pi \int_{-a}^a \left( 1 - \frac{x^2}{a^2} \right) dx = \frac{2}{3} abc \pi$$

El volumen del elipsoide completo es  $\frac{4}{3} abc \pi$ . En particular, si el elipsoide es una esfera de radio  $r$ , esto es  $a = b = c = r$ , deducimos que el volumen de la esfera es  $\frac{4}{3} \pi r^3$ .

En lugar de proyectar sobre el plano  $XY$  podemos proyectar  $\Omega$  sobre el eje  $OZ$ . Dicha proyección es el intervalo  $[0, c]$ . Para cada  $z \in [0, c]$  tenemos que el conjunto de puntos de  $\Omega$  que se proyectan en  $z$ , es decir, la sección de  $\Omega$  por el plano  $Z = z$ , es el conjunto

$$\Omega(z) = \left\{ (x, y, z) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 - \frac{z^2}{c^2} \right\}$$

Como

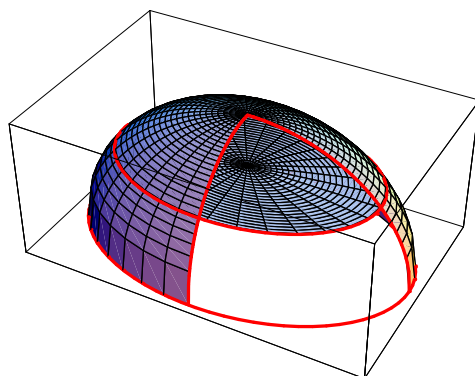
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 - \frac{z^2}{c^2} \iff \frac{x^2}{u^2} + \frac{y^2}{v^2} \leq 1$$

donde  $u = a \sqrt{1 - \frac{z^2}{c^2}}$ ,  $v = b \sqrt{1 - \frac{z^2}{c^2}}$ . Deducimos que  $\Omega(z)$  es una elipse contenida en el plano  $Z = z$  de semiejes  $u$ ,  $v$ . Sabemos que el área de dicha elipse es igual a  $\pi uv = \pi ab \left( 1 - \frac{z^2}{c^2} \right)$ . En consecuencia, el volumen de  $\Omega$  viene dado por

$$\int_0^c \pi ab \left( 1 - \frac{z^2}{c^2} \right) dz = \frac{2}{3} abc \pi$$

En la siguiente figura se ha representado el semi-elipsoide abierto para que pueda apreciarse mejor una sección por un plano de altura constante.

♦



Observa que a los cálculos anteriores también se llega si tratamos de calcular directamente el volumen de  $\Omega$  por medio de una integral triple. Sabemos que

$$\text{volumen}(\Omega) = \iiint_{\Omega} d(x, y, z)$$

Para calcular esta integral aplicamos el teorema de Fubini. Proyectando  $\Omega$  sobre el plano  $XY$  tenemos que

$$\iiint_{\Omega} d(x, y, z) = \iint_A \left[ \int_0^{c \sqrt{1-x^2/a^2-y^2/b^2}} dz \right] d(x, y) = \iint_A c \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} d(x, y)$$

Proyectando  $\Omega$  sobre el eje  $OZ$  tenemos que

$$\iiint_{\Omega} d(x, y, z) = \int_0^c \left[ \iint_{\Omega(z)} d(x, y) \right] dz = \int_0^c \pi ab \left( 1 - \frac{z^2}{c^2} \right) dz$$

### 2.2.2. Teorema del cambio de variables

Para funciones de una variable sabemos que

$$\int_a^b f(x) dx = \int_c^d f(g(t)) g'(t) dt$$

donde se supone que  $a < b$  y  $g(c) = a$ ,  $g(d) = b$ . Supongamos que la función  $g$  es inyectiva, entonces  $g$  debe ser creciente o decreciente. Si es decreciente se tiene que  $d < c$  y  $g'(t) \leq 0$ , por lo que  $|g'(t)| = -g'(t)$  y podemos escribir

$$\int_c^d f(g(t)) g'(t) dt = - \int_d^c f(g(t)) |g'(t)| dt$$

Podemos, por tanto, cuando  $g$  es inyectiva, escribir en todos los casos

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(g(t)) |g'(t)| dt \quad (2.13)$$

donde  $g$  es una biyección del intervalo  $[a, b]$  sobre el intervalo  $[\alpha, \beta]$ . Esta fórmula se generaliza para funciones de varias variables dando lugar al teorema del cambio de variables.

El teorema del cambio de variable para integrales dobles afirma que

$$\iint_A f(x, y) d(x, y) = \iint_B f(g(u, v)) |\det J_g(u, v)| d(u, v) \quad (2.14)$$

donde se supone que la función  $g$  es una biyección de  $B$  sobre  $A$  de clase  $C^1$  (sus funciones componentes tienen derivadas parciales continuas) con determinante jacobiano distinto de cero, esto es,  $\det J_g(u, v) \neq 0$  para todo  $(u, v) \in B$ . En esta fórmula se interpreta que la función  $g$  hace un *cambio de coordenadas* pues permite asignar a cada punto  $(x, y) \in A$  el único punto  $(u, v) \in B$  tal que  $g(u, v) = (x, y)$ .

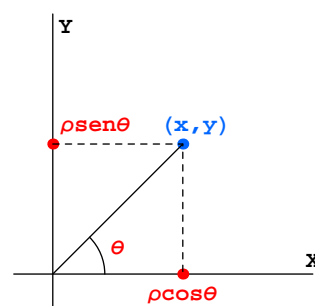
Aunque la integral de la derecha en la fórmula (2.14) parece más complicada que la de la izquierda, cuando hacemos un cambio de variable lo que se trata es de conseguir que o bien la función  $f(g(u, v)) |\det J_g(u, v)|$  sea más sencilla de integrar en  $B$  que la función  $f(x, y)$  en  $A$  o bien que el recinto de integración  $B$  sea más sencillo que  $A$ . Si podemos conseguir las dos cosas, mejor.

Las condiciones que hemos supuesto para la validez de la fórmula (2.14) se pueden relajar un poco permitiendo que puedan fallar en un número finito de curvas. Por ejemplo, es suficiente que  $g$  sea una biyección de  $B$  sobre el conjunto  $A$  en el que se ha suprimido un segmento; o puede permitirse que el determinante jacobiano de  $g$  se anule en alguna curva en  $B$ . La idea, que no hay que olvidar, es que para calcular integrales dobles podemos ignorar lo que pasa en conjuntos de “área cero”.

Solamente con la práctica se puede aprender cuándo es conveniente hacer un cambio de variables y qué función es la adecuada para realizarlo. Para integrales dobles el cambio de variable más útil es a coordenadas polares. Ya hemos considerado dichas coordenadas en la Lección 8 pero conviene recordarlas ahora.

## 2.2.2.1. Coordenadas polares

La función  $g(\rho, \vartheta) = (\rho \cos \vartheta, \rho \sin \vartheta)$  es una biyección de  $\mathbb{R}^+ \times ]-\pi, \pi]$  sobre  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ . Las componentes de  $g$  tienen derivadas parciales continuas y fácilmente se comprueba que  $\det J_g(\rho, \vartheta) = \rho > 0$ . El par de números  $(\rho, \vartheta)$  dados por  $x = \rho \cos \vartheta$ ,  $y = \rho \sin \vartheta$  donde  $\rho > 0$  y  $-\pi < \vartheta \leq \pi$  se llaman coordenadas polares del punto de coordenadas cartesianas  $(x, y)$ .



La fórmula del cambio de variables (2.14) para el caso de coordenadas polares se expresa por

$$\iint_A f(x, y) d(x, y) = \iint_B f(\rho \cos \vartheta, \rho \sin \vartheta) \rho d(\rho, \vartheta) \quad (2.15)$$

La mayor dificultad para aplicar esta fórmula es la determinación del conjunto  $B$ . Dicho conjunto viene dado por

$$B = \{(\rho, \vartheta) \in \mathbb{R}^+ \times ]-\pi, \pi] : (\rho \cos \vartheta, \rho \sin \vartheta) \in A\}$$

Si, por ejemplo, el conjunto  $A$  es de tipo I,  $A = \{(x, y) : a \leq x \leq b, g(x) \leq y \leq h(x)\}$ , entonces

$B = \{(\rho, \vartheta) \in \mathbb{R}^+ \times ]-\pi, \pi] : a \leq \rho \cos \vartheta \leq b, g(\rho \cos \vartheta) \leq \rho \sin \vartheta \leq h(\rho \cos \vartheta)\}$ . Es importante describir bien el conjunto  $B$  porque para calcular la integral  $\iint_B f(\rho \cos \vartheta, \rho \sin \vartheta) \rho d(\rho, \vartheta)$

tienes que aplicar, naturalmente, el teorema de Fubini. Si, por ejemplo,

$$B = \{(\rho, \vartheta) : \alpha \leq \vartheta \leq \beta, g(\vartheta) \leq \rho \leq h(\vartheta)\}$$

entonces

$$\iint_A f(x, y) d(x, y) = \iint_B f(\rho \cos \vartheta, \rho \sin \vartheta) \rho d(\rho, \vartheta) = \int_{\alpha}^{\beta} \left[ \int_{g(\vartheta)}^{h(\vartheta)} f(\rho \cos \vartheta, \rho \sin \vartheta) \rho d\rho \right] d\vartheta \quad (2.16)$$

Las coordenadas polares son especialmente útiles cuando el conjunto  $A$  es un círculo, o un sector circular o una corona circular, pues en estos casos el conjunto  $B$  es muy sencillo. Si, por ejemplo,  $A$  es el disco  $D((0, 0), R)$  de centro el origen y radio  $R$ ,  $D((0, 0), R) = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq R^2\}$ , entonces

$$B = \{(\rho, \vartheta) \in \mathbb{R}^+ \times ]-\pi, \pi] : \rho \leq R\} = ]0, R] \times ]-\pi, \pi]$$

Por tanto

$$\iint_{D((0,0),R)} f(x,y) d(x,y) = \int_0^R \left[ \int_{-\pi}^{\pi} f(\rho \cos \vartheta, \rho \sin \vartheta) \rho d\vartheta \right] d\rho = \int_{-\pi}^{\pi} \left[ \int_0^R f(\rho \cos \vartheta, \rho \sin \vartheta) \rho d\rho \right] d\vartheta \quad (2.17)$$

El teorema del cambio de variable para integrales triples afirma que

$$\iiint_A f(x,y,z) d(x,y,z) = \iiint_B f(g(u,v,w)) |\det J_g(u,v,w)| d(u,v,w) \quad (2.18)$$

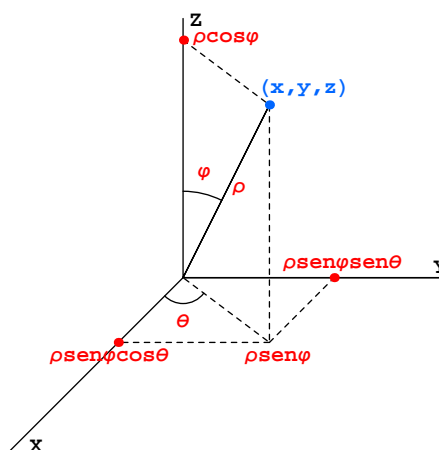
donde se supone que la función  $g$  es una biyección de  $B$  sobre  $A$  de clase  $C^1$  (sus funciones componentes tienen derivadas parciales continuas) con determinante jacobiano distinto de cero, esto es,  $\det J_g(u,v,w) \neq 0$  para todo  $(u,v,w) \in B$ . Estas condiciones se pueden relajar un poco permitiendo que puedan fallar en un número finito de superficies. Por ejemplo, es suficiente que  $g$  sea una biyección de  $B$  sobre el conjunto  $A$  en el que se ha suprimido un trozo de plano; o puede permitirse que el determinante jacobiano de  $g$  se anule en alguna superficie en  $B$ . La idea, que no hay que olvidar, es que para calcular integrales triples podemos ignorar lo que pasa en conjuntos de “volumen cero”.

### 2.2.2.2. Coordenadas esféricas

La función

$$g(\rho, \vartheta, \varphi) = (\rho \sin \varphi \cos \vartheta, \rho \sin \varphi \sin \vartheta, \rho \cos \varphi)$$

es una biyección de  $\mathbb{R}^+ \times ]-\pi, \pi] \times [0, \pi]$  sobre  $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ . Las componentes de  $g$  tienen derivadas parciales continuas y fácilmente se comprueba que  $\det J_g(\rho, \vartheta, \varphi) = -\rho^2 \sin \varphi$ . La terna de números  $(\rho, \vartheta, \varphi)$  dados por  $x = \rho \sin \varphi \cos \vartheta$ ,  $y = \rho \sin \varphi \sin \vartheta$ ,  $z = \rho \cos \varphi$  donde  $\rho > 0$  y  $-\pi < \vartheta \leq \pi$ ,  $0 \leq \varphi \leq \pi$ , se llaman coordenadas esféricas del punto de coordenadas cartesianas  $(x,y,z)$ .



La fórmula del cambio de variables (2.18) para el caso de coordenadas esféricas se expresa por

$$\iiint_A f(x,y,z) d(x,y,z) = \iiint_B f(\rho \sin \varphi \cos \vartheta, \rho \sin \varphi \sin \vartheta, \rho \cos \varphi) \rho^2 \sin \varphi d(\rho, \vartheta, \varphi) \quad (2.19)$$

La mayor dificultad para aplicar esta fórmula es la determinación del conjunto  $B$ . Dicho conjunto viene dado por

$$B = \{(\rho, \vartheta, \varphi) \in \mathbb{R}^+ \times ]-\pi, \pi] \times [0, \pi] : (\rho \sin \varphi \cos \vartheta, \rho \sin \varphi \sin \vartheta, \rho \cos \varphi) \in A\}$$

Las coordenadas esféricas son especialmente útiles cuando el conjunto  $A$  es una esfera, o un sector esférico o una corona esférica, pues en estos casos el conjunto  $B$  es muy sencillo. Si, por ejemplo,  $A = B((0, 0, 0), R) = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2\}$  (esfera de centro el origen y radio  $R$ ), entonces

$$B = \{(\rho, \vartheta, \varphi) \in \mathbb{R}^+ \times ]-\pi, \pi] \times [0, \pi] : \rho \leq R\} = ]0, R] \times ]-\pi, \pi] \times [0, \pi]$$

Por tanto

$$\iiint_{B((0,0,0),R)} f(x, y, z) d(x, y, z) = \int_0^R \left[ \int_{-\pi}^{\pi} \left[ \int_0^{\pi} f(\rho \sin \varphi \cos \vartheta, \rho \sin \varphi \sin \vartheta, \rho \cos \varphi) \rho^2 \sin \varphi d\varphi \right] d\vartheta \right] d\rho \quad (2.20)$$

y la integral iterada puede hacerse en el orden que se quiera.

### 2.2.2.3. Interpretación de la fórmula del cambio de variables

Todo esto está muy bien, pero ¿por qué se cumple el teorema del cambio de variables? Excepto el parecido formal que hay entre las fórmulas (2.13) y (2.14), nada te he dicho que te ayude a comprender por qué dicho teorema tiene que ser cierto. No es difícil comprender de forma intuitiva las razones profundas del teorema. Por comodidad, consideremos el caso de integrales dobles. En la igualdad

$$\iint_A f(x, y) d(x, y) = \iint_B f(g(u, v)) |\det J_g(u, v)| d(u, v) \quad (2.21)$$

supongamos que la función  $f$  es la función constantemente igual a 1. Entonces dicha igualdad nos dice que

$$\iint_A d(x, y) = \iint_B |\det J_g(u, v)| d(u, v) \quad (2.22)$$

y como,  $\iint_A d(x, y)$  es el área del conjunto  $A = g(B)$ , lo que nos dice esta igualdad es que

$$\text{área}(g(B)) = \iint_B |\det J_g(u, v)| d(u, v) \quad (2.23)$$

En particular, si la aplicación  $g$  es una aplicación lineal de  $\mathbb{R}^2$  en  $\mathbb{R}^2$ , entonces el determinante jacobiano de  $g$  es el determinante de  $g$  (como aplicación lineal), esto



es,  $\det J_g(u, v) = \det(g)$ . Si, además, tomamos como conjunto  $B$  el intervalo  $[0, 1] \times [0, 1]$ , obtenemos que

$$\text{área}(g([0, 1] \times [0, 1])) = \iint_{[0, 1] \times [0, 1]} |\det J_g(u, v)| \, d(u, v) = \int_0^1 \left[ \int_0^1 |\det(g)| \, du \right] dv = |\det(g)| \quad (2.24)$$

Es decir, el valor absoluto del determinante de una aplicación lineal es el área de la imagen por dicha aplicación del intervalo unidad  $[0, 1] \times [0, 1]$ . ¡Que esto efectivamente se cumple puedes comprobarlo de forma elemental! Observa que en el caso, todavía más especial, de que  $g$  sea una aplicación lineal del tipo  $g(x, y) = (ax, by)$  donde  $a$  y  $b$  son números reales, entonces  $|\det(g)| = |ab|$  y, evidentemente,  $\text{área}(g([0, 1] \times [0, 1])) = |ab|$ . En este caso se ve claramente que  $|\det(g)|$  *representa el producto de las dilataciones que realiza  $g$  en cada uno de los ejes*. Esta interpretación también es correcta para cualquier aplicación lineal.

Podemos interpretar ahora la igualdad (2.23) anterior. En ella lo que se hace es aproximar localmente la aplicación diferenciable  $g$  por su aplicación derivada la cual, como sabes, es una aplicación lineal de  $\mathbb{R}^2$  en  $\mathbb{R}^2$  cuyo determinante es precisamente el determinante jacobiano de  $g$ ,  $\det J_g(u, v)$ . De forma sugerente, *la igualdad (2.23) expresa que la dilatación global que produce en el conjunto  $B$  la aplicación diferenciable  $g$  se obtiene integrando las dilataciones locales, y éstas se calculan sustituyendo  $g$  por su aplicación derivada*, lo que, por lo que acabamos de decir, explica la intervención de  $|\det J_g(u, v)|$  en la fórmula (2.21).

La demostración, que es bastante técnica, de la fórmula del cambio de variables (2.21) consiste en demostrar la igualdad (2.22), pues de ella se deduce con facilidad el caso general. Confío en que con lo antes dicho hayas llegado a entrever las razones profundas de por qué se verifica dicha igualdad.

### 2.2.3. Ejercicios propuestos

**81.** Calcula la integral de la función  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  en los siguientes casos:

- a)  $f(x, y) = 1$  siendo  $A$  la región limitada por  $y^2 = x^3$ ,  $y = x$ .
- b)  $f(x, y) = x^2$  siendo  $A$  la región limitada por  $xy = 16$ ,  $y = x$ ,  $y = 0$ ,  $x = 8$ .
- c)  $f(x, y) = x$  siendo  $A$  el triángulo de vértices  $(0, 0)$ ,  $(1, 1)$ ,  $(0, 1)$ .
- d)  $f(x, y) = x$  siendo  $A$  la región limitada por la recta que pasa por  $(0, 2)$  y  $(2, 0)$  y la circunferencia de centro  $(0, 1)$  y radio 1.
- e)  $f(x, y) = e^{x/y}$  siendo  $A$  la región limitada por  $y^2 = x$ ,  $x = 0$ ,  $y = 1$ .

- f)  $f(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}$  siendo  $A$  la región limitada por  $y = \frac{x^2}{2}$ ,  $y = x$ .
- g)  $f(x,y) = xy^2$  siendo  $A$  la región limitada por  $y^2 = 2x$ ,  $x = 1$ .
- h)  $f(x,y) = xy$  siendo  $A$  la región limitada por la semicircunferencia superior  $(x-2)^2 + y^2 = 1$  y el eje  $OX$ .
- i)  $f(x,y) = 4 - y^2$  siendo  $A$  la región limitada por  $y^2 = 2x$  e  $y^2 = 8 - 2x$ .
- j)  $f(x,y) = e^{x^2}$  siendo el conjunto  $A$  el triángulo formado por las rectas  $2y = x$ ,  $x = 2$  y el eje  $x$ .
- k)  $f(x,y) = \frac{x-y}{x+y}$ ; donde  $A$  es el cuadrado de vértices  $(0,2)$ ,  $(1,1)$ ,  $(2,2)$ ,  $(2,3)$ .

**82.** Calcula los siguientes volúmenes:

- a) Volumen del sólido limitado superiormente por  $z = x + y$  e inferiormente por el triángulo de vértices  $(0,0)$ ,  $(0,1)$ ,  $(1,0)$
- b) Volumen del sólido limitado superiormente por  $z = 2x + 1$  e inferiormente por el conjunto  $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + (y-1)^2 \leq 1\}$
- c) Volumen del sólido comprendido por el paraboloide de ecuación  $z = x^2 + y^2$  e inferiormente por el disco unidad.
- d) Volumen del sólido limitado superiormente por  $z = 4 - y^2 - \frac{x^2}{4}$  e inferiormente por el disco  $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + (y-1)^2 \leq 1\}$ .
- e) Volumen del sólido acotado por el plano  $z = 0$  y el paraboloide de ecuación  $z = 1 - x^2 - y^2$ .
- f) Volumen del conjunto  $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq x^2 + y^2 \leq 2x\}$ .
- g) Volumen limitado por el paraboloide elíptico  $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = z$  y el plano  $z = 7$ .

**83.** Utiliza el cambio a coordenadas polares para calcular las integrales de las siguientes funciones en los recintos que se indican:

- a)  $f(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2}$ ,  $A = B((0,0), 1)$
- b)  $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ ,  $A = [0,1] \times [0,1]$
- c)  $f(x,y) = y$ ,  $A = \{(x,y) \in B((1/2,0), 1/2) : y \geq 0\}$
- d)  $f(x,y) = x^2 + y^2$ ,  $A = B((1,0), 1)$
- e)  $f(x,y) = x^2 + y^2$ ,  $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 4 \leq x^2 + y^2 \leq 9\}$

**84.** Calcula la integral de  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  en cada uno de los siguientes casos:

- a)  $f(x,y) = x$ ,  $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 2x\}$

- b)  $f(x, y) = x \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ ,  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1, x, y \geq 0\}$
- c)  $f(x, y) = \exp(x/y)$ ,  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y^3 \leq x \leq y^2\}$
- d)  $f(x, y) = \exp\left(\frac{y-x}{y+x}\right)$ ,  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x, y \geq 0, x+y \leq 2\}$
- e)  $f(x, y) = (x^2 + y^2)^{-\frac{3}{2}}$ ,  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq y, x+y \geq 1, x^2 + y^2 \leq 1\}$
- f)  $f(x, y) = x^2 + y^2$ ,  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x^2 + y^2)^2 \leq 4(x^2 - y^2), x \geq 0\}$
- g)  $f(x, y) = x^2 + y^2$ ,  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 2y, x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0\}$
- h)  $f(x, y) = \sqrt{xy}$ ,  $A$  dominio acotado por la curva  $\left(\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{3}\right)^4 = \frac{xy}{\sqrt{6}}$  que está en el primer cuadrante.
- i)  $f(x, y, z) = \frac{1}{(x+y+z)^3}$ ,  $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x+y+z \leq 1, x, y, z \geq 0\}$
- j)  $f(x, y, z) = (x+y+z)^2$ ,  $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, x^2 + y^2 + z^2 \leq 2z\}$
- k)  $f(x, y, z) = z$ ,  $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} \leq 1, z \geq 0\}$
- l)  $f(x, y, z) = z$ ,  $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq z^2, 0 \leq z \leq 1\}$
- m)  $f(x, y, z) = x^2$ ,  $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0, x^2 + y^2 + (z-1)^2 \leq 1, 4z^2 \geq 3(x^2 + y^2)\}$
- n)  $f(x, y, z) = zy \sqrt{x^2 + y^2}$ ,  $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq x^2 + y^2, 0 \leq y \leq \sqrt{2x - x^2}\}$
- ñ)  $f(x, y, z) = z$ ,  $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 2, x^2 + y^2 \leq z\}$
- o)  $f(x, y, z) = z^2$ ,  $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2, x^2 + y^2 + z^2 \leq 2Rz\}$
- p)  $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ ,  $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 3\}$
- q)  $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + z^2}$ ,  $A$  el conjunto acotado por el paraboloide  $y = x^2 + z^2$  y el plano  $y = 4$ .

**85.** Calcula el volumen del conjunto  $A$  en cada uno de los siguientes casos:

- a)  $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq z \leq \sqrt{x^2 + y^2}\}$
- b)  $A = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1, 0 \leq z \leq \sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}} \right\}$
- c)  $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq x^2 + y^2, x+y \leq 1, x, y \geq 0\}$
- d)  $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq \sqrt{x^2 + y^2}, x^2 + y^2 \leq 2y\}$
- e)  $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq 4 - y^2, 0 \leq x \leq 6\}$
- f)  $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{x} \leq y \leq 2\sqrt{x}, 0 \leq z \leq 9 - x\}$
- g)  $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq z^2, x^2 + y^2 + z^2 \leq 2z\}$